دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

پارادکس یابلو و قضایای ناتمامیت گودل

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور

دکتر هژیر حومئی

پژوهشگر

ولی دل‌آراء مغانلو

تابستان ۱۳۹۴

بسم الله الرحمن الرحیم

دلم جواب بلی می‌دهد صلای ترا
صلا بزن که به جان می‌خرم بلای ترا
★★★★
به زلف گو که ازل تا ابد کشاکش تست
نه ابتدای تو دیدم نه انتهای ترا
★★★★
کشم جفای تو تا عمر باشدم، هر چند
وفا نمی‌کند این عمرها وفای ترا
★★★★
به جاست کز غم دل رنجه باشم و دلتنگ
مگر نه در دل من تنگ کرده جای ترا
★★★★
تو از دریچه دل می‌روی و می‌آیی
ولی نمی‌شنود کس صدای پای ترا
★★★★
غبار فقر و فنا توتیای چشمم کن
که خضر راه شوم چشمه بقای ترا
★★★★

از کلیات استاد شهریار

تقدیم به:

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام‌بخش آلام زمینی‌ام است:

مقدس‌ترین واژه‌ها در لغت نامه دلم، مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت ایشان می‌دانم.

استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پرمهر پدرم.

همسرم که نشانه موهبت الهی در زندگی من است.

برادران و خواهرانم همراهان همیشگی و پشتوانه زندگیم.

بنام خدا

و لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه‌سار بنده‌نوازی‌هایش پایان‌نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به‌جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان‌نامه به انجام نمی‌رسید.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **سعید صالحی پورمهر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر**هژیر حومئی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر **جعفرصادق عیوضلو** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر **کریمی** که در تدوین این رساله کمک شایانی به اینجانب نمودند و همچنین از تمام دوستان دوران تحصیلم بخصوص آقای **سراجی** کمال قدردانی و تشکر را دارم. ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی بخصوص دکتر **اصغر رنجبری** مدیرگروه ریاضی محض و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

بوسه بر دستان پدر ومادر عزیزم می‌زنم که صبورانه رنج سال‌های تحصیل مرا تحمل کردند واندرزهای‌شان همیشه روشنگر راهم بوده و خواهد بود انشاالله.

و سپاس و سپاس از همسر مهربانم که وجودش التیام‌بخش لحظه‌های سختی بود که سپری شد و عاشقانه مرا در این راه یاری کرد.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

ولی دل آراء مغانلو

تابستان ۱۳۹۴

نام خانوادگی دانشجو: دل‌آراء مغانلو   نام: ولی

عنوان: پارادکس یابلو و قضایای ناتمامیت گودل

استاد راهنما : دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور : دکتر هژیر حومئی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: منطق   دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: تابستان ۱۳۹۴   تعداد صفحات: ۸۰

کلید واژه‌ها: ناتمامیت گودل، اُمِگاــ سازگاری، پارادُکس یابلو، اثبات‌پذیری، حساب.

چکیده

پارادُکس یابلو از چالش‌برانگیزترین مباحثی است که اخیراً مورد نقد و بررسی فیلسوفان، ریاضی‌دانان و حتی دانشمندان علوم کامپیوتر قرار گرفته است. در این پارادوکس با معرفی یک سری بی‌پایان از جملاتی که خودــ متناقض نیستند، ولی از وجود این بی‌نهایت جمله تناقض نتیجه می‌شود، ظاهراً از دور و تسلسل دوری می‌گردد. جملات $\{Y_n\}_n$ را در نظر بگیرید به طوری که برای هر n، Y_n درست است اگر و تنها اگر برای هر $m > n$، جمله Y_m نادرست باشد. در حقیقت هر جمله از دنباله یابلو بیان می‌کند که تمامی جملات پس از او همگی نادرستند. می‌توان دید که وجود چنین دنباله‌ای از جملات به تناقض منجر می‌شود.

کورت گودل در مقاله اصلی خود، جایی که قضیه ناتمامیت را ثابت می‌کند، اشاره به این نکته دارد که به جای پارادکس دروغگو می‌توان از پارادکس‌های معنایی دیگری بهره جست. اخیراً برهان‌های متفاوت و زیبایی برای قضایای اول و دوم ناتمامیت گودل براساس پارادکس‌های مختلف از جمله پارادکس بری و پارادکس آزمون ناگهانی ارایه شده‌اند. در این پایان‌نامه که براساس مراجع [۱۶] و [۵] تنظیم شده، رابطه محتمل پارادکس یابلو (که ظاهراً غیر دوری است) با قضیه ناتمامیت گودل بررسی می‌شود، و برهان‌هایی برای قضیه ناتمامیت گودل براساس پارادکس یابلو معرفی می‌گردند.

فهرست مطالب

مقدمه

یابلو به منظور رد این باور عمومی که همه پارادکس‌ها خودارجاعی هستند (یا دوری هستند و یا از قطری‌سازی استفاده می‌کنند)، پارادکس خود را در سال ۱۹۹۳ ارایه نمود که به نظر می‌رسد خودارجاعی نیست. این پارادکس به نام «پارادکس یابلو» مشهور است. از آن زمان به بعد تحقیقات زیادی توسط منطق‌دانان و فیلسوفان در مورد خودارجاعی بودن یا نبودن این پارادکس انجام شده و بسیاری از محققان این زمینه‌ها در این این سال‌ها با این موضوع درگیر بوده‌اند و مقالات بسیاری در این زمینه نوشته شده است. برخی از آنها به دفاع از ایده یابلو نموده و اصرار بر خودارجاعی نبودن این پارادکس دارند. در مقابل، برخی دیگر به رد ایده یابلو و اصرار بر خودارجاعی بودن این پارادکس وزیده‌اند به گونه‌ای که به جرأت می‌توان گفت که پارادکس یابلو چالش برانگیزترین پارادکس در دو دهه اخیر بوده و می‌باشد. در این پایان‌نامه، ما به صورت مفصل به بررسی پارادکس یابلو، صورتبندی‌های مختلف آن و همچنین ارتباط این پارادکس با پدیده ناتمامیت خواهیم پرداخت.

در فصل دوم که براساس مرجع [۱۶] تنظیم شده است، چند قضیه در مورد جملات حساب که مربوط به پارادوکس یابلو هستند، تقریباً همان‌گونه که جمله تصمیم‌ناپذیر قضیه اول گودل به پارادوکس دروغگو مربوط بود، معرفی خواهند شد. هر کدام از آنها شامل نمادی است که اسم گودل، یروسلو، یا هنکین را نمایش می‌دهد که معمولاً به عنوان جمله‌ای خود ارجاعی شناخته می‌شود، و به صورت دنباله‌ای از جملات تفکیک می‌شوند که می‌توانند به طور طبیعی به عنوان زنجیره‌ای از ارجاعات ناخوش‌ساخت قلمداد شوند.

این نتایج جالب هستند، اولاً چون که آنها از ادعای گودل [۱۲] مبنی بر اینکه هر «پارادوکس معرفت

شناختی» می‌تواند ما را به نوعی از ناتمامیت ریاضی رهنمون شود، حمایت می‌کنند. و دوم، این‌که آنها پیوندی قوی بین رفتار جملات حسابی معرفی شده در بالا (گودل، هنکین و یروسلو) و رفتار (قسمت‌های بازشده) آنها که در این فصل بررسی خواهند شد، را نشان می‌دهند. در صورت عدم وجود یک مثال نقض، این تناظر یک طرح یا الگویی را پیشنهاد می‌کند که می‌تواند به حالت‌های دیگر نیز تعمیم یابد، یا حتی خودش می‌تواند یک نامزدی برای بررسی بیشتر باشد، که این بررسی باید شامل یک صوری سازی از مفهوم بازشده‌ی منطقی باشد.

در فصل سوم و چهارم که براساس مرجع [۵] تنظیم شده‌اند، دنباله یابلو را صوری سازی کرده و بررسی می‌کنیم که هرگاه در پارادکس یابلو به جای عملگر «صدق» از «اثبات‌پذیری» استفاده کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟ با استفاده از روش قطری‌سازی، دنباله‌های مناسبی از جملات می‌توانند ساخته شوند. در حقیقت این دنباله‌ها توسط هیچ نظریه به اندازه‌کافی قوی و سازگار، تصمیم‌پذیر نیستند. همچنین، موضوع گودلی سازی دنباله یابلو را بررسی می‌کنیم. هرگاه محمول اثبات‌پذیری، شرایط اثبات‌پذیری را ارضا کند، هر چنین جمله‌ای به‌طور اثبات‌پذیر با جمله سازگاری و با جمله گودلی معادل خواهد بود. بنابراین هر دو این‌گونه جملات با یکدیگر به‌طور اثبات‌پذیر معادل هستند. همین مطلب برای وجود حسابی‌سازی در پارادکس یابلو برقرار است.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پارادکس

پارادکس این است که از مقدمه‌هایی که به ظاهر پذیرفتنی می‌نمایند با استدلالی که به ظاهر درست می‌نماید نتیجه‌ای ناپذیرفتنی به‌دست آید [۲۶]. البته مترجمان در ترجمه پارادکس معادل‌هایی از قبیل تناقض‌نما، باطل‌نما، معما، خارق‌اجماع، تعارض در اقوال، تضاد، ناسازه، تنازع، ... را جایگزین نموده‌اند. اما به نظر می‌رسد که هیچ یک از آنها معنای دقیق پارادکس را بیان نمی‌کنند. شاید به همین خاطر است که برخی مترجمان ترجیح می‌دهند خود آن را بدون ترجمه در زبان فارسی بیاورند. همان‌گونه که در بالا ذکر کردیم، پارادکس عبارت‌است از به‌دست آوردن یک جمله‌ی غیر قابل قبول از مقدمات مقبول و قواعد استنتاجی معتبر. به همین دلیل نیز، برای حل پارادکس سعی می‌شود یا در صدق مقدمات و یا در اعتبار قواعد استنتاج خدشه وارد کرده و یا این‌که نتیجه را پذیرفته و تنها توضیح داده شود که چرا غیر قابل قبول جلوه می‌نماید. به عبارتی دیگر، می‌توان پارادکس را به این صورت تعریف نمود: آنچه تناقض‌آمیز، باورنکردنی یا خلاف انتظار و شهود ماست (آنچه به نظر درست می‌رسد ولی غلط است، غلط به نظر می‌رسد ولی درست است، یا به نظر غلط می‌رسد و واقعاً غلط است) پارادکس یا باطل‌نما خوانده می‌شود [۲۵].

ممکن است فکر کنیم که پارادکس‌ها به ریاضیات ربطی ندارند، یا این که جزو «ریاضیات واقعی» نیستند. یا اساساً حقه و شعبده‌اند و به همین دلیل مفید نیستند، اما نه تنها چنین نیست بلکه عده‌ی زیادی، آن‌ها را بخشی از ریاضیات به حساب می‌آورند که از نظر تاریخی در ایجاد انگیزه برای گسترش مرزهای دانش، تعمیق بینش، تعمیم شیوه‌های استدلال، افزایش دقت و وضع قوانین زبان شناختی جدید تأثیر شگرف داشته‌اند. مثلاً پارادکس‌های زِنون در تکامل حسابان در قرن‌های ۱۷ تا ۱۹، پارادکس‌های نظریه مجموعه‌ها مانند پارادکس‌های بورالی و فورتی، کانتور و راسِل در تدقیق نظریه (شهودی) مجموعه‌های کانتور، پارادکس دروغگو در طرح برهان قضیه‌ی ناتمامیت گودل در قرن بیستم (که می‌گوید «این جمله اثبات شدنی نیست» در درون یک دستگاه صوری به قدر کافی بزرگ اثبات شدنی نیست)، نقش به‌سزایی داشتند. بعضی پارادکس‌ها که متضمن تناقض هستند، صادق به نظر می‌رسند و حتی این ایده را به ذهن نزدیک می‌کنند که چرا تناقض را نپذیریم. می‌دانیم که در ریاضیات کلاسیک به استناد استنتاج معتبر $(\neg A \wedge A) \Rightarrow B$، تناقض هر چیزی را نتیجه

می‌دهد. اما چرا باید به این مطلب گردن نهاد؟ در واقع نوعی منطق پیراسازگار[۱] وجود دارد که در آن تناقض پذیرفتنی است و بر خلاف ریاضیات کلاسیک، چنین نیست که از تناقض هر چیزی نتیجه شود.

ابزارهای متفاوتی برای رفع و رجوع پارادکس‌ها به کار گرفته شده‌اند. به طور مثال می‌توان از فرازبان برای تفکیک جملات به لایه‌های مختلفی با نام‌های نوع اول، نوع دوم و ... که روی آن‌ها درستی و نادرستی به‌طور مستقل تعیین می‌شوند استفاده کرد، کاری که مثلاً در مورد پارادکس دروغگو[۲] بیان می‌دارد «آن‌چه می‌گویم دروغ است» انجام شدنی است. برای مثال تارسکی[۳] با تقسیم زبان به دو لایه زبان موضوعی که در مورد اشیا نامربوط به زبان صحبت می‌کند و فرازبان که در مورد زبان موضوعی سخن می‌راند، استدلال می‌کند که وقتی می‌گوییم «آن‌چه می‌گویم دروغ است»، عبارت «دروغ است»، که متعلق به فرازبان است در لایه موضوعی به کار رفته است و لذا از نظر ساختار منطقی اشکال دارد. با این حال، هر بار که پارادکسی در ریاضیات (و علم) ظاهر می‌شود، برای حل آن باید فهم خود را از آنچه داریم بهبود بخشیم یا تصحیح کنیم یا قوانین زبان شناختی مناسب وضع کنیم و این دلیل، برای قرار دادن پارادکس‌ها در کالبد ریاضیات و جدی گرفتن آن‌ها کافی به نظر می‌رسد. البته تنوع و تاریخچه‌ی پارادکس‌ها بسیار فراتر از گنجایش این سمینار می‌باشد. پارادکس‌ها در بستر طیف وسیعی از علوم در طول تاریخ حادث گردیده‌اند از جمله در منطق، فلسفه، ریاضی، هندسه، اقتصاد، فیزیک و حتی در شیمی. در این مختصر ما صرفاً به بیان چند پارادکس تاریخی و مهم می‌پردازیم.

---

[۱] Parconsistent

[۲] Liar Paradox

[۳] A. Tarski

۱.۱.۱ پارادکس آرایشگر

پارادکس آرایشگر[۴] به چند شکل مختلف مطرح گردیده است، که اغلب دارای یک مفهوم هستند. شکل عمومی‌تر آن به این صورت است: گویند در دهکده‌ای دور افتاده از سیسیل که در پشت کوه‌های سر به فلک کشیده پنهان شده است آرایشگری هست که از ساکنان دهکده فقط ریش کسانی را می‌تراشد که خود ریش خود را نمی‌تراشند. حال سوال این است که تکلیف این آرایشگر با ریش خودش چیست؟ ریش خود را خود می‌تراشد یا نمی‌تراشد؟ فرض می‌کنیم خودش ریش خودش را بتراشد. پس از کسانی است که خودشان ریش خودشان را می‌تراشند اما بنابر تعریفی که از این آرایشگر کردیم او ریش چنین کسانی را نمی‌تراشد. پس نباید ریش خود را بتراشد، حالا فرض می‌کنیم خودش ریش خودش را نمی‌تراشد. پس بنا به تعریف چون از کسانی است که ریش خودش را نمی‌تراشند. پس باید ریش خود را بتراشد. وضع غریبی است. اگر ریش خود را بتراشد ریش خود را نمی‌تراشد و اگر ریش خود را نتراشد ریش خود را می‌تراشد. به اصطلاح این آرایشگر ریش خود را می‌تراشد اگر و تنها اگر ریش خود را نتراشد. و این یک تناقض است. چگونه این تناقض ایجاد شد؟

در این پارادکس دو نکته مندرج است: یکی روانشناختی و دیگری منطقی. نکته روانشناختی این است که اگر دروغی را با شرح و تفصیل و جزییات بگوییم بسیاری آن را باور می‌کنند. نکته منطقی این‌که به صرف تعریف نمی‌توان شیئی آفرید که مصداق آن تعریف باشد. به همین دلیل وقتی منطق‌دانان تعریفی از عددی یا مجموعه‌ای می‌کنند پس از تعریف دو مطلب را هم ثابت می‌کنند: اول این‌که چیزی با این تعریف وجود دارد، دوم این‌که آن چیز موجود منحصر بفرد است. ملاحظه می‌کنیم که پارادکس آرایشگر سیسیلی راه حل ساده‌ای دارد. ابتدا فرض می‌کنیم که بنا به ادعای گوینده چنین آرایشگری وجود دارد. سپس از این فرض به تناقض می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم که چنین آرایشگری وجود ندارد. این همان روش برهان خلف است. به طور خلاصه در این پارادکس دو مقدمه داریم:

[۴] Barber Paradox

۱. آرایشگری در دهکده سیسیلی وجود دارد.
۲. این آرایشگر تنها ریش همه‌ی آن کسانی را می‌تراشد که ریش خود را نمی‌تراشند.
از این دو مقدمه نتیجه می‌گیریم که:
۳. این آرایشگر ریش خود را می‌تراشد و ریش خود را نمی‌تراشد.
«۳» تناقض است و نتیجه نهایی این است که مقدمه‌ی «۱ و ۲» رانقض کنیم و بگوییم:
۴. چنین آرایشگری در دهکده سیسیلی وجود ندارد.

گاهی پارادکس به دلیل نادرستی استدلال به وجود می‌آید. یعنی مقدمه‌ها، برخلاف پارادکس آرایشگر، ایرادی ندارند اما استدلال ایراد دارد. نمونه‌ای از این گونه، استدلالی است که دمورگان برای اثبات «$1 = 2$» آورده است (مرجع [۲۶]) . فرض کنید:

۱) $x = 1$

حال دو طرف معادله فوق را در x ضرب می‌کنیم:

۲) $x^2 = x$

حال از هر دو طرف عدد 1 را کم می‌کنیم:

۳) $x^2 - 1 = x - 1$

می‌دانیم که:

۴) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۳) داریم:

۵) $(x + 1)(x - 1) = x - 1$

اکنون طرفین را بر $x - 1$ تقسیم می‌کنیم:

۶) $x + 1 = 1$

ما از (۱) می‌دانیم که $x = 1$. در (۶) به جای عدد «1» را قرار می‌دهیم:

۷) $2 = 1$

ایراد کار در کجاست؟ استدلال از «۲» شروع شده و به «۷» پایان یافته است. بنابراین اگر ایرادی در کار باشد در یکی از همین مراحل استدلال است. بنابر «۱»، «$x = 1$»، پس «$x - 1 = 0$». در

مرحله «۶» تقسیم طرفین بر «$x-1$»، یعنی تقسیم طرفین معادله بر صفر را انجام داده‌ایم و این همان کاری است که مجاز نیست. در واقع با تقسیم بر صفر کار را به بینهایت کشانده و مبهم نموده‌ایم. این یک نمونه از استدلالی است که به ظاهر درست می‌نماید، اما در حقیقت درست نیست.

۲.۱.۱ پارادکس بِری

پارادکس بری[۵] که اولین بار در سال ۱۹۰۶ توسط برتراند راسل بیان شد، منتسب به آقای جیِ‌جیِ بِری[۶]، کتاب‌دار دانشگاه آکسفورد، می‌باشد. عبارت «کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از سیزده کلمه قابل توصیف نیست» توصیفی متشکل از ۱۲ کلمه می‌باشد. بنابراین کوچکترین عدد صحیحی که در کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف نیست در کمتر از ۱۳ کلمه توصیف شد، زیرا عبارت بیان شده دارای ۱۲ کلمه است. چون تعداد کلمات متناهی فرض شده‌اند پس تعداد عبارت‌های متشکل از ۱۳ کلمه متناهی هستند و از این‌رو تعداد اعداد صحیحی که با استفاده از این عبارت‌ها توصیف می‌شود، بنابر اصل لانه کبوتری[۷] متناهی است. چون تعداد اعداد صحیح نامتناهی است پس عدد صحیحی وجود خواهد داشت که با استفاده از عبارت‌های ۱۳ کلمه‌ای قابل توصیف نخواهد بود، یعنی اعداد صحیحی وجود خواهند داشت که «قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه نیستند». با استفاده از اصل خوش ترتیبی[۸]، اگر اعداد صحیحی وجود دارند که خاصیت فوق را ارضا می‌کنند، پس کوچک‌ترین عدد صحیحی که خاصیت مذکور را ارضا می‌کند وجود دارد. بنابراین کوچک‌ترین عدد صحیحی وجود دارد که خاصیت «قابل توصیف نبودن در کمتر از ۱۳ کلمه» را ارضا می‌کند. یعنی این اعداد صحیح با عبارت مذکور تعریف می‌شود. عبارت مذکور شامل ۱۲ کلمه است، پس عد صحیحی که با استفاده از عبارت فوق توصیف می‌شود کمتر از ۱۳ کلمه دارد و کوچک‌ترین عدد صحیحی که در کمتر از ۱۳ کلمه غیر قابل توصیف باشد، نیست و با عبارت فوق تعریف نمی‌شود. این یک پارادکس است: عدد صحیحی که با عبارت فوق توصیف می‌شود بایستی وجود

[۵] Berry's Paradox

[۶] G. G. Berry

[۷] Pigeanhole Principle

[۸] Well Ordering Principle

داشته باشد، اما چون عبارت مذکور خودمتناقض [۹] است (یعنی هر عدد صحیحی که آن توصیف می‌کند، قابل توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه است)، هیچ عدد صحیحی با آن توصیف نمی‌شود.

پارادکس بری به صورت‌هایی که بیان گردید به خاطر ابهام سیستمی در کلماتی مانند «توصیف‌پذیر»، «تعریف‌پذیر»، «ارضاپذیر»، «قابل نامگذاری» و ... ایجاد گردیده است. کلماتی از این نوع منجر به دور باطلی سفسطه آمیز می‌شوند. به منظور حل چنین پارادکس‌هایی بایستی دقیقاً تعیین نمود مواردی که استفاده از زبان موجب اشتباه می‌شود و محدودیت‌هایی را جهت اجتناب از این موارد فراهم آوریم. پارادکس‌های از این خانواده را می‌توان با ترکیب لایه‌های معانی در زبان حل نمود. کلماتی با این ابهام سیستمی ممکن است اندیس‌گذاری شوند که دلالت بر این امر دارد که معنای یک سطح مقدم بر دیگری فرض شده است. «عددی که در کمتر از یازده کلمه قابل تعریف نباشد» ممکن است در این طرح در کمتر از یازده کلمه قابل تعریف باشد. ضمناً با استفاده از برنامه‌ها و برهان‌های با طول کراندار، ممکن است عبارت شبیه پارادکس بری را در زبان صوری ریاضی بسازیم؛ در حقیقت گریگوری چایتین[۱۰] موفق به این امر گردید [۷].

گودل از پارادکس دروغگو الهام گرفت. در واقع جوهر قضیه تاریخی وی همان پارادکس دروغگو است که از زمان یونان باستان شناخته شده بود. اگر در دروغگو (من درست نیستم) عبارت «درست» را با «اثبات‌پذیر» تعویض نماییم، در این حالت یک پارادکس نخواهیم داشت. زیرا جمله‌ی «من اثبات‌پذیر نیستم» یک تناقض نیست. چرا؟ چون اگر نادرست باشد باید «اثبات‌پذیر» باشد که امکان ندارد. پس این جمله درست بوده و از شق اخیر هیچ تناقضی حاصل نمی‌شود. این جمله درست است اما نمی‌توان آن را اثبات نمود. اما برای این‌که بتوان این را به عنوان یک قضیه ریاضی در نظر گرفت باید به یک زبان صوری ترجمه شود. در زبان‌های محاوره‌ای چیزی بنام ضمیمه داریم و در نتیجه جملات می‌توانند در باره خودشان صحبت کنند. آیا در ریاضیات نیز می‌توان جمله‌ای نوشت که راجع به خودش صحبت کند؟

[۹] Self-Contradictory

[۱۰] G. Chaitin

کار نبوغ‌آمیز گودل همین بود. او این جمله را به شکل صوری درآورد و به طور دقیق نشان داد که اگر یک زبان صوری داشته باشیم به طوری که با استفاده از آن زبان بتوان در باره اعداد طبیعی و اعمال جمع و ضرب صحبت کرد آنگاه می‌توان جمله‌ی «من اثبات‌ناپذیرم» را به این زبان ترجمه کرد. با توجه به این که هر دستگاه صوری که بخواهد کل ریاضیات را پوشش دهد خودبخود شامل اعداد طبیعی و اعمال مربوط به آن خواهد بود، پس ترجمه صوری جمله‌ی «من اثبات‌ناپذیرم» یکی از گزاره‌های آن دستگاه خواهد بود. بنابراین در آن دستگاه صوری گزاره‌ای خواهیم داشت که درست است اما اثبات‌پذیر نیست. این دقیقاً یک جواب منفی برای برنامه صورت‌گرایی هیلبرت بود. در ضمن قضایای ناتمامیت دیگری نیز با الهام از پارادکس بری به وجود آمده‌اند که در آنها پیچیدگی برنامه‌های کامپیوتری برای ایجاد اعداد طبیعی مورد توجه هستند. با روش اخیر می‌توان به ناتمامیت ریاضیات به صورت خیلی راحت‌تر دست یافت [۳].

۳.۱.۱ پارادکس راسِل

پارادکس راسل[۱۱] از مهم‌ترین پارادکس‌های نظریه مجموعه‌ها است که توسط ریاضیدان و فیلسوف انگیلیسی برتراند راسل در سال ۱۹۰۱ معرفی شد. این پارادکس نشان می‌دهد که نظریه طبیعی مجموعه‌های فرگه که بر پایه کارهای جرج کانتور بود، دارای تناقضاتی در درون خودش است. در نظریه طبیعی مجموعه‌ها دو اصل موضوع عمده وجود دارد که عبارت‌اند از اصل موضوع گسترش و اصل موضوع شهودی انتزاع. اصل انتزاع[۱۲] بیان می‌کند، اگر $\phi(x)$ خاصیتی در مورد متغیر آزاد x باشد آنگاه $\{x : \phi(x)\}$ یک مجموعه است. به بیان دیگر متناظر با هر خاصیتی نظیر $\phi(x)$، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً شامل عناصری است که در $\phi(x)$ صدق می‌کنند. بدین ترتیب این اصل به ما اجازه می‌دهد بوسیله هر ویژگی دلخواه یک مجموعه را تشکیل دهیم. برتراند راسل بوسیله این پارادکس نشان داد که در نظر گرفتن این اصل در نظریه مجموعه‌های کانتور نظریه‌ای ناسازگار است و نیاز به بازنگری دارد.

[۱۱] Russell's Paradox

[۱۲] Axiom of Abstraction

وقتی تعدادی از اشیاء را با هم در نظر می‌گیریم و آنها را با عنوان یا صفتی که همه در آن مشترک‌اند مشخص کنیم مجموعه‌ای ساخته‌ایم. شاید چیزی بدیهی‌تر از این نباشد که بگوییم، هر توصیفی یا شرطی مجموعه‌ای را مشخص می‌کند. این‌که هر شرطی مجموعه‌ای می‌سازد حکمی وجودی است. یعنی با هر شرطی مجموعه‌ای بوجود می‌آید. نظر به اهمیت این حکم، آن را یکی از اصول نظریه‌ی مجموعه قرار داده و اصل انتزاع نامیده‌اند. بنابر این اصل، برای هر صفتی مجموعه‌ای وجود دارد که عضوهای آن تنها همان اشیائی هستند که آن صفت را دارند.

اما مجموعه‌ها به اعتباری به دو گروه مجزا تقسیم می‌شوند. توضیح این‌که مجموعه‌ی انسان‌ها خود، انسان نیست، بلکه شیئی مجرد است، همچنین مجموعه‌ی اسب‌ها خود، اسب نیست. پس این مجموعه‌ها عضو خود نیستند. در واقع اغلب مجموعه‌ها چنین‌اند. مجموعه‌ی اعداد فرد، خود عدد فرد نیست و بنابراین عضو خود نیست. اما مجموعه‌ی مفهوم‌ها خود یک مفهوم است و عضو این مجموعه است. حال همه‌ی مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی انسان‌ها، مجموعه‌ی اسب‌ها و مانند آنها را که عضو خود نیستند گرد می‌آوریم و از آنها یک مجموعه می‌سازیم. اصل انتزاع هم می‌گوید چنین مجموعه‌ای وجود دارد. صفت کلی اعضای این مجموعه هم این است: «مجموعه‌هایی که عضو خود نیستند».

حال می‌پرسیم: آیا این مجموعه، عضو خود هست یا نیست. اگر این مجموعه عضو خود باشد ــ باید ناچار صفت مشترک عضوهای خود را داشته باشد یعنی ــ باید عضو خود نباشد. واگر عضو خود نباشد ــ از آن‌جایی که صفت عضو خود نبودن، یعنی صفت مشترک عضوهای خود را دارد ــ باید عضو خود باشد. بنابراین، این مجموعه اگر عضو خود باشد عضو خود نیست و اگر عضو خود نباشد عضو خود هست. و این تناقض است. این مجموعه نه می‌تواند عضو خود باشد و نه می‌تواند عضوخود نباشد. پس ملاحظه می‌شود شرط «عضو خود نبودن» شرط معقولی نیست. به بیان دیگر باید از اصل انتزاع که می‌گوید متناظر با هر شرطی مجموعه‌ای وجود دارد، صرف نظر نموده و مفهوم دقیق‌تری از شرط ارایه دهیم.

به بیان دیگر، خاصیت $\phi(x) : x \notin x$ را در مورد مجموعه‌ها در نظر می‌گیریم: در این صورت

مطابق اصل انتزاع $\{\phi(x) : x \notin x\}$ یک مجموعه است که شامل همه مجموعه‌هایی است که عضو خودشان نیستند. اگر قرار دهیم $R = \{x : x \notin x\}$ خواهیم داشت $\forall A(A \in R \Leftrightarrow A \notin A)$. هیچ چیز در نظریه مجموعه‌های کانتور و فرگه مانع تعریف چنین مجموعه‌ای نمی‌شود. مشکل زمانی حادث می‌شود که به خود مجموعه R، به عنوان مجموعه قابل قبول بنگریم و این سوال را در مورد R مطرح کنیم که آیا R عضوی از خودش است یا نه؟

- اگر پاسخ آری دهیم، پس $R \in R$ و لذا بنابر تعریف مجموعه R باید داشته باشیم $R \notin R$ که این تناقض است.

- اگر پاسخ خیر دهیم، پس $R \notin R$ و لذا بنابر تعریف R باید داشته باشیم $R \in R$ که این نیز تناقض است.

این پارادکس نشان می‌دهد که اصل گسترش وجود مجموعه‌ی $\{x : \phi(x)\}$ برای هر فرمول ϕ معتبر نیست. همچنین این پارادکس اولین عامل برانگیختن تلاش ریاضیدانان در جهت اصل موضوعی نمودن نظریه مجموعه‌ها بود. راسل به همراه آلفرد نورث وایتهد[۱۳] سعی نمودند با گسترش نظریه گونه‌ها[۱۴] این پارادکس را حل نمایند. در سال ۱۹۰۸ ارنست زرملو[۱۵] یک دستگاه اصل موضوعی را برای نظریه مجموعه‌ها ارایه داد که از پارادکس‌های نظریه مجموعه‌ها جلوگیری می‌کرد. با اصلاح این اصول توسط فرانکیل[۱۶] و زرملو در سال ۱۹۲۰ نظریه مجموعه‌های زرملو ــ فرانکیل یا ZFC اصل انتزاع وجود ندارد بلکه بیان می‌کند برای هر مجموعه X و خاصیت ϕ زیرمجموعه Y از X وجود دارد که دارای خاصیت ϕ است. به عبارت دیگر

$$\forall x\big(x \in Y \Longleftrightarrow x \in X \wedge \phi(x)\big)$$

در این صورت مجموعه ناممکن راسل R دیگر یک مجموعه معتبر از نظر ZFC نبوده و اساساً قابل

[۱۳] A. N. Whitehead

[۱۴] Type Theory

[۱۵] E. Zermelo

[۱۶] B. Franklin

تعریف خواهد بود. اما ZFC تنها نظریه اصل موضوعی بوجود آمده نبود بلکه نظریه‌های دیگری چون نظریه مجموعه‌های وان نیومن_ گودل_ برنیز (NGB) نیز در این راستا بوجود آمدند. این پارادکس برخلاف پارادکس آرایشگر ناچارمان می‌کند که اصل جا افتاده و پذیرفته شده‌ای مانند اصل انتزاع را کنار بگذاریم. به این پارادکس‌ها به اصطلاح تناقض‌نما[17]، و به پارادکس‌هایی مانند پارادکس آرایشگر که راه حل منطقی دارند شبه‌پارادکس[18] می‌گویند. حال به بیان پارادکس دیگری از نوع تناقض‌نما می‌پردازیم [۲۶].

۴.۱.۱ پارادکس دروغگو

پارادکس کلاسیک و مشهور دیگر، پارادکس دروغگو می‌باشد که در آن تناقض از جمله دروغگو بدست می‌آید. ساده‌ترین بیان پارادکس دروغگو این است که گوینده‌ای درباره‌ی خود بگوید؛ «آنچه می‌گویم دروغ است». پرسش این است که آیا این گوینده راست می‌گوید یا دروغ می‌گوید. اگر راست بگوید پس این‌که می‌گوید دروغ می‌گویم حرف راستی می‌زند، یعنی دروغ می‌گوید. و اگر دروغ می‌گوید پس این‌که خود می‌گوید دروغ می‌گویم حرف راستی می‌زند یعنی راست می‌گوید. پس اگر آنچه می‌گوید راست باشد دروغ است و اگر دروغ باشد راست است.

اهمیت پارادکس راسل در این بود که درک ما را در مورد یکی از بنیادی‌ترین مفهوم‌ها یعنی مفهوم مجموعه در معرض شک می‌نهاد و اهمیت این پارادکس در این است که یکی دیگر از مهمترین مفاهیم یعنی مفهوم صدق را به مخاطره می‌افکند. پارادکس دروغگو نیز در نظریه صدق همان اثر ویران کننده را دارد که پارادکس راسل در نظریه مجموعه‌ها. مفهوم صدق و این‌که جمله‌ها و گفته‌ها به چه اعتباری صادق‌اند از مباحث اساسی فلسفه و علوم‌اند و پارادکس دروغگو درست همین مفهوم را تا حد تناقض مورد تردید قرار می‌دهد.

برای پارادکس دروغگو راه حل‌های متعددی پیشنهاد کرده‌اند و می‌کنند و این نشانه آن است که

[17] Antinomy

[18] Psudo Paradox

برای این طبقه از پارادکس‌ها راه حل قاطعی هنوز نیافته‌ایم و شاید هرگز نیابیم. اما هر راه حلی ما را از نکته‌ی تازه‌ای آگاه می‌کند. حال ما به بیان راه حل راسل با استفاده از اصل دور باطل و همچنین راه حل تارسکی با استفاده از مفهوم فرا زبان می‌پردازیم.

راسل پس از کشف پارادکس مشهور خود، پارادکس‌های گوناگون دیگری نیز کشف و معرفی کرد و برای حل آنها به خصوص پارادکس خود و پارادکس دروغگو به طرح چند نظریه ریاضی پرداخت. حال صرف‌نظر از صحت یا سقم این نظریه‌ها به این ایده می‌پردازیم. از نظر فلسفی، راسل بر آن بود که این دو پارادکس منشأ یکسانی دارند و علت وجودی آنها دخالت اصلی است که آن را اصل دور باطل[۱۹] می‌نامید. بیان روشنی از این اصل این است که هیچ مجموعه‌ای را نمی‌توان با شرطی مشخص کرد که خود آن مجموعه نیز مشمول آن گردد. به عبارت دیگر، یک مجموعه نباید تنها بر حسب خود آن مجموعه قابل تعریف باشد. هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند شامل عضوهایی باشد که تنها بر حسب آن مجموعه قابل تعریف باشند.

راسل و پوانکاره[۲۰] چنین شرط عضویتی را نامستند[۲۱] نامیده‌اند. دورِ باطل وقتی دخالت می‌کند که در تعریف مجموعه، شرط عضویتی به کار بریم که مستقیم یا غیرمستقیم به مجموعه‌هایی ارجاع می‌دهد که یکی از آنها همان مجموعه‌ای باشد که می‌خواهیم مشخص کنیم. شرطی که نه تنها عضوهای یک مجموعه بلکه خود آن مجموعه را نیز دربر گیرد، دور باطل است. پارادکس راسل به دلیل دخالت همین اصل به وجود می‌آید. زیرا شرط عضو خود نبودن را نه تنها به اعضای آن بلکه به خود آن نیز تعمیم می‌دهد. پارادکس دروغگو نیز، به خصوص در شکل معروف تاریخی آن، همین نقص را دارد. فردی از اهالی کِریت[۲۲] گفته است:

«همه‌ی کریتی‌ها دروغگو هستند».

[۱۹] Principie of Vicious Circle

[۲۰] H. Poincaré

[۲۱] Impredicative

[۲۲] Cretan

اگر این را یک سیسیلی در باره اهالی کریت گفته بود پارادکس نبود اما از آن‌جا که گوینده خود، اهالی کریت است، حکم او در باره کریتی‌ها شامل خودش نیز می‌شود. در این‌جا نیز این گفته مشمول همان حکم مجموعه گفته‌های اهلی کریت می‌شود و این همان دخالت دور باطل در مشخص کردن مجموعه این گفته‌ها است.

فرانک رمزی[۲۳] در سال ۱۹۲۵ در مقاله‌ای با به چالش کشیدن این ایده راسل، پارادکس‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کند: پارادکس‌های منطقی که شامل پارادکس‌های متعدد نظریه مجموعه‌ها و مفاهمی چون مجموعه و عضویت هستند و پارادکس‌های معنایی یا دلالت شناختی که شامل مفاهیمی چون صدق و کذب و تعریف‌پذیری هستند. با این تقسیم‌بندی پارادکس راسل و پارادکس دروغگو متعلق به دو دسته جدا از هم‌اند و برخلاف نظر راسل بایستی راه حل‌های جدا از هم داشته باشند.

تارسکی به پیروی از ارسطو می‌گوید جمله وقتی صادق است که امور همان گونه‌ای باشد که آن جمله می‌گوید و وقتی کاذب است که امور از آن گونه‌ای نباشد که می‌گوید. بنابراین «برف سپید است» وقتی صادق است که برف سپید باشد. تارسکی این حکم را که بسیار ساده به نظر می‌رسد چنین می‌نویسد:

«برف سپید است» صادق است اگر و تنها اگر برف سپید باشد.

در سمت راست این عبارت جمله‌ای را که اسناد صدق به آن داده‌ایم میان علامت « » گذاشته‌ایم و در سمت چپ، از این علامت بیرون آورده‌ایم. به بیان دیگر در سمت راست جمله را نقل کرده‌ایم و به آن اسناد صدق داده‌ایم و در سمت چپ خود آن را اظهار کرده‌ایم و به کار برده‌ایم. تارسکی با این کار می‌خواهد بگوید وقتی به جمله‌ای اسناد صدق می‌دهیم حکمی در باره‌ی آن به عنوان یک واحد زبانی می‌کنیم و نتیجه این اسناد این است که خود آن جمله را به کار بریم و تصدیق کنیم. وقتی می‌گوییم برف سپید است در باره‌ی دنیای خارج و امور بدان گونه‌ای که هستند سخن می‌گوییم. اما وقتی در باره جمله‌ای حکم به صدق آن می‌کنیم از زبان کاربردی فاصله می‌گیریم و دیگر نه در باره‌ی جهان بلکه در باره‌ی زبان سخن می‌گوییم. گاهی زبان را برای بحث درباره‌ی جهان یعنی امور بیرون

[۲۳] F. Ramsay

از زبان به کار می‌بریم و گاهی برای بحث در باره‌ی زبان. در کاربرد اول موضوع مورد بحث زبان، جهان خارج است یعنی با آن در باره‌ی موضوع‌های بیرون از زبان سخن می‌گوییم و برای مثال بیان می‌کنیم: برف سپید است و زغال سیاه است. این لایه از زبان را که نخستین لایه‌ی کاربرد زبان است زبان موضوعی[۲۴] می‌گوییم و در کاربرد دوم که در باره‌ی زبان حرف می‌زنیم و می‌گوییم

«برف سپید است» صادق است،

از لایه نخستین فراتر می‌رویم و در باره جمله‌های زبان صحبت می‌کنیم. بدین اعتبار این لایه از زبان را فرازبان[۲۵] می‌نامیم. اکنون اگر فرا زبان را موضوع بحث قرار دهیم و در باره‌ی جمله‌های این حکمی صادر کنیم و برای مثال بگوییم

««برف سپید است» صادق است» صادق است،

از فرازبان به فرافرازبان رفته‌ایم و زبان موضوعی ما نخستین فرازبان شده است. البته می‌توان این رویه را ادامه داد ولی برای دو مرحله‌ی نخست کفایت می‌کند. سخن تارسکی این است که عبارت «صادق است» یا «کاذب است» متعلق به فرازبان است. نخست بایست زبان موضوعی خود را که با آن در باره‌ی جهان و برف و زغال حرف می‌زنیم داشته باشیم سپس از این زبان فراتر رویم و در فرا زبان حکم به صدق و کذب جمله‌های آن کنیم. حال پارادکس دروغگو را در نظر می‌گیریم: در پارادکس دروغگو عبارت «دروغ است» را بدون فرا رفتن از زبان موضوعی برای همین زبان به کار برده‌ایم و این کاربردی اشتباه است. با این کار دو لایه زبان موضوعی و فرازبان را به هم آمیخته‌ایم و به ناچار دچار تناقض شده‌ایم. به طور خلاصه جمله

«آنچه می‌گویم دروغ است»

جمله‌ای است که عبارت «دروغ است» در جای درست خود به کار نرفته و جمله از نظر ساختار منطقی نادرست است. نتیجه‌ای که تارسکی از این بحث می‌گیرد این است که زبان طبیعی بدون اعتبار ـ اعتبار دلالت شناسی ـ نارساست[۲۶] و از این رو دلالت شناسی خود را محدود به زبان منطقی و

[۲۴] Object Language

[۲۵] Meta Language

[۲۶] Defective

ریاضی می‌کند. دلالت شناسی تارسکی که مبنی بر سلسله مراتب فرازبان‌ها است به پایه‌گذاری نظریه‌ی مدل انجامیده است.

۵.۱.۱ پارادکس یابلو

نمونه‌ای از پارادکس دروغگو سخن سَفسطه آمیزی به این شکل است که اولاً دوری بوده و در ثانی بصورت غیر مستقیم خودارجاعی است:

حمید: «آنچه سعید می‌گوید غلط است.»

سعید: «آنچه حمید می‌گوید درست است.»

این پارادکس توسط آلبرت ساکسونی در قرون وسطی طرح گردیده است و در اصطلاحاً پارادکس دور نامیده می‌شود. البته می‌توان آن‌را به حلقه طولانی‌تری تعمیم داد:

(S_1) جمله‌ی S_2 غلط است.

(S_2) جمله‌ی S_3 غلط است.

(S_3) جمله‌ی S_4 غلط است.

$\vdots$

(S_n) جمله‌ی S_1 درست است.

این جملات بصورت متناوب درست یا غلط خواهند بود: $TFTF\ldots$ یا $FTFT\ldots$ زیرا S_1 درست است اگر S_n درست باشد، و غلط است اگر S_n غلط باشد؛ اگر تعداد nها زوج باشد پارادکس ایجاد می‌شود زیرا در این حالت S_1 تا S_n ارزش درستی متفاوتی خواهند گرفت.

پارادکس استفان یابلو[۲۷] در سال ۱۹۹۳ منتشر گردید که شامل دنباله‌ای نامتناهی از جملات است:

[۲۷] E. Yablo

(Y_1) همه‌ی جملات بعدی $(Y_2, Y_3, Y_4, \ldots)$ غلط هستند.

(Y_2) همه‌ی جملات بعدی $(Y_3, Y_4, Y_5, \ldots)$ غلط هستند.

(Y_3) همه‌ی جملات بعدی $(Y_4, Y_5, Y_6, \ldots)$ غلط هستند.

$\vdots$

(Y_n) همه‌ی جملات بعدی $(Y_{n+1}, Y_{n+2}, Y_{n+3}, \ldots)$ غلط هستند.

$\vdots$

فرض کنیم Y_1 درست باشد. پس همه‌ی جملات بعدی یعنی $(Y_2, Y_3, Y_4, \ldots)$ غلط می‌باشند. اگر Y_2 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 2$ درست و این تناقض است. همچنین اگر Y_1 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 1$ درست است. ولی جملات بعد از Y_n یعنی $(Y_{n+1}, Y_{n+2}, Y_{n+3}, \ldots)$ همگی غلط‌اند. اگر Y_{n+1} غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_m که $m > n + 1$ درست است و این تناقض است.

یابلو ادعا نمود که برخلاف انواع پارادکس دروغگو، این پارادکس شامل خودارجاعی نیست، زیرا هر جمله راجع به جملات بعدی است نه در خصوص خودش. اما هر جمله به نظر می‌رسد به صورت ضمنی خودارجاعی باشد زیرا «همه‌ی جملات بعدی» در هر مورد به این صورت «همه‌ی جملات بعد از این» فهمیده می‌شود. یابلو واقعاً به جملات بعدی، توسط «$\forall k > n$» ارجاع می‌دهد، که n اندیس فعلی برای Y است، اما خودارجاعی هنوز به صورت ضمنی محتمل است. اما خواه خود ارجاع باشد یا نه، ما به وضوح یک پارادکس داریم.

۲.۱ برخی مفاهیم مقدماتی

می‌خواهیم کمی راجع به جملات حسابی و راجع به معانی «درست» و «نادرست» در متن زیر صحبت کنیم:

زبان حسابی شامل علایم $+$ و $\times$ نمادهای تابعی دو موضعی به ترتیب برای جمع و ضرب و S یک نماد تابعی یک موضعی برای تابع تالی، 0 نماد ثابت برای صفر و $<$ یک نماد رابطه‌ای دو موضعی برای ترتیب می‌باشد. همچنین شامل علامت $=$ (تساوی) به اضافه‌ی علایم منطقی معمول $\neg$ (نقیض)، $\wedge$ (و)، $\vee$ (یا)، $\rightarrow$ (اگر ... آنگاه ...)، $\leftrightarrow$ (... اگر و تنها اگر ...)، $\forall$ (به ازای هر) و $\exists$ (وجود دارد) و پارانتزها می‌باشد. متغیرهای زبان حساب عبارات $x, x', x'', \ldots$ می‌باشند که از نماد x و $'$ تشکیل شده‌اند و فرض شده است که اعداد طبیعی $(0, 1, 2, \ldots)$ را به عنوان مقادیرشان اختیار کنند. متغیرها را با حروف y و z و غیره خلاصه نویسی خواهیم کرد.

اکنون تقریباً به مفهومی از درستی و نادرستی در زبان حسابی رسیده‌ایم. به عنوان مثال،

$$\forall x \exists y \big(x = s(y)\big)$$

یک جمله‌ی غلط است، زیرا در اعداد طبیعی این‌طور نیست که هر عدد طبیعی دیگری مثل x تالی عدد طبیعی y است (مثل صفر که تالی هیچ عدد طبیعی نیست). از طرف دیگر

$$\forall x \exists y \big(x = (y + y) \vee x = s(y + y)\big)$$

یک جمله‌ی درست است، زیرا برای هر عدد طبیعی x عدد طبیعی y وجود دارد به طوری که $x = 2y$ یا $x = 2y + 1$. همچنین بسیاری از مطالب وجود دارد که می‌توانند در زبان حسابی بیان شوند. برای مثال کمتر بودن $x < y$ می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$.\exists z \big(s(z) + x\big) = y$$

در واقع برای هدف ما، صوری بودن همان مقدار که درباره‌ی نحو و معنای زبان حسابی بوده، لازم است. برای هر $n \in \mathbb{N}$، منظور از $\overline{n}$ عبارت است از ترم $S(S(\ldots S(0)\ldots))$ یا $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ بار}}$ که در واقع از اثر دادن تابع تالی S به تعداد n بار روی نماد 0 بدست می‌آید. برای مثال، $\bar{3} = SSS0$ است. توجه کنید که عبارت $\bar{n}$ عبارتی برای بیان عدد n است.

منظور از یک مدل استاندارد برای حساب عبارت است از یک ساختار در زبان حساب با جهان $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ که در آن نمادهای زبان حساب دارای تعابیر استاندارد می‌باشند.

فرض کنیم $\mathcal{L}_{\mathtt{PA}} = \{+, ., 0, 1, <\}$ زبانی از مرتبه اول درحساب باشد. حساب پئانو که با PA نشان داده می‌شود، نظریه‌ای در $\mathcal{L}_{\mathtt{PA}}$ است که شامل اصول نیم‌حلقه‌های به طور گسسته مرتب یکدار و طرح اصل استقرا است.

اصول پئانو

(1) $(\forall x)(\forall y)\big(S(x) = S(y) \to x = y\big)$

(2) $(\forall x)\big(S(x) \neq 0\big)$

(3) $(\forall x)\big(x + 0 = x\big)$

(4) $(\forall x)\big(x + S(y) = S(x + y)\big)$

(5) $(\forall x)(\forall y)\big(x \times S(y) = x \times y + x\big)$

(6) $(\forall x)\big(x \times 1 = x\big)$

(7) $\varphi(0) \wedge (\forall x)\left[\varphi(x) \to \varphi\big(S(x)\big)\right] \to (\forall x)\varphi(x)$

حال یکی از زبان‌های استاندارد مرتبه اول را در نظر می‌گیریم. منظور از یک فرمول (به ترتیب جمله، ترم و ...)، یک فرمول (به ترتیب جمله، ترم و ...) در این زبان است. نظریه‌ها، مجموعه‌ای دلخواه از جملات هستند. حساب رابینسون را با Q نشان خواهیم داد. یک جمله را درست (یا تعریف‌پذیر) گوییم هرگاه جمله‌ی مورد بررسی در مدل استاندارد Q درست (یا تعریف‌پذیر) باشد.

حساب رابینسون Q یک بخش اصل‌بندی شده‌ی متناهی از حساب پئانو است، Q اساساً همان PA بدون اصل استقرا و در نتیجه ضعیف‌تر از PA است.

اصول حساب رابینسون

(1) $S(x) \neq 0$

(2) $S(x) = S(y) \to x = y$

(3) $x \neq 0 \to (\exists x)\big(x = S(y)\big)$

(4) $x + \overline{0} = x$

(5) $x + S(y) = S(x + y)$

(6) $x \times \overline{0} = \overline{0}$

(7) $x \times S(y) = (x \times y) + x$

(8) $x \leqslant y \equiv (\exists z)\big(z + x = y\big)$

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه A را شمارای کارامد (شمارش‌پذیر بازگشتی) گوییم هرگاه تابع پوشای محاسبه‌پذیر $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ موجود باشد؛ به عبارتی دیگر الگوریتمی موجود باشد که همه اعضای A را لیست کند. ⊛

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. گوییم تابع f در T «نمایش‌پذیر» است اگر یک فرمول $\phi(x, y)$ در T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:
اگر $f(n)$ تعریف شده باشد آنگاه $T \vdash \forall x\big(\phi(\overline{n}, x) \longleftrightarrow x = \overline{f(n)}\big)$. ⊛

برای مثال $f(n) = 2n$ توسط فرمول $\phi(x, y) \equiv (y = SS(0) \cdot x)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. نظریه‌ای را که در آن تمامی توابع بازگشتی، نمایش‌پذیر باشند. نظریه به اندازه کافی قوی گویند. ⊛

منظور از نظریه به اندازه کافی قوی که در بالا ذکر شده، هر نظریه‌ای در مورد اعداد طبیعی است که در آن توابع بازگشتی نمایش‌پذیرند. اکنون توابع و محمول‌هایی که گودل نمایش‌پذیری آنها را در نظریه $\mathbf{T}$ نشان داده است را مطرح می‌کنیم، که در آن $\mathbf{T}$ را توسیعی به طور بازگشتی اصل‌پذیر از PA در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که همه نظریه‌های مرتبه اول شامل ارقام[۲۸] استاندارد زیر باشد:

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots$$

همچنین نماد «$\ulcorner\ \urcorner$» را برای کدگذاری[۲۹] جمله‌ها و فرمول‌ها استفاده خواهیم نمود. یک کدگذاری در واقع یک تابع یک به یک از جملات به اعداد می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر φ یک جمله باشد آنگاه $\ulcorner\varphi\urcorner$ یک رقم مانند $\overline{n}$ می‌باشد که در آن n یک عدد طبیعی است. عبارت $\ulcorner\varphi\urcorner$ یک نام‌گذاری برای φ است که آن را عدد کد (عدد گودل) جمله φ می‌نامیم. اگر $\psi(\varphi)$ یک فرمول با متغیر آزاد x باشد آنگاه $\ulcorner\psi(\varphi)\urcorner$ یک جمله است که می‌گوید: «φ دارای خاصیتی است که توسط ψ بیان می‌شود». با در نظر گرفتن حقایق بالا، توجه داشته باشید که جمله $(\ulcorner\psi(\varphi)\urcorner)$ به جمله φ ارجاع می‌دهد.

[۲۸] Numerals

[۲۹] Coding Schmeme

- قاعده‌ای که B را از A و $A \to B$ نتیجه می‌دهد عنوان قاعده MP (وضع مقدم[۳۰]) اختصاص داده شده است.
- یک جمله گودل جمله‌ای است که درست است اما نمی‌تواند در سیستم داده شده اثبات شود.
- $\mathsf{prf}_{\mathbf{T}}(m,x)$ که در آن m طول اثبات جمله‌ای در $\mathbf{T}$ است که عدد گودلی آن x است.
- محمول $\mathsf{prov}_{\mathbf{T}}(y)$ به معنی «فرمول با عدد گودل y در T قابل اثبات است».
- محمول $\mathsf{proof}_{\mathbf{T}}(y,x)$ به معنی «y عدد گودلی یک اثبات از جمله‌ای است که عدد گودلی آن x است».
- $\mathsf{prov}_{\mathbf{T}}(x) \equiv \exists y\ \mathsf{proof}_{\mathbf{T}}(y,x)$ یعنی اثباتی در $\mathbf{T}$ از یک جمله وجود دارد که عدد گودلی آن x است.
- فرض کنید $\mathsf{Pr}_{\mathbf{T}}(x)$ یک Σ_1 فرمول باشد که رابطه‌ای بازگشتی مقدماتی را مشخص می‌کند، به طوری که x، عدد گودل فرمولی است که در نظریه $\mathbf{T}$ اثبات‌پذیر است.

مفهوم خودارجاعی به وضعیتی گفته می‌شود که در آن کسی یا چیزی به خودش اشاره و ارجاع می‌دهد. اشیایی که به خود اشاره و ارجاع می‌کنند را اصطلاحاً خودارجاع[۳۱] می‌نامیم. هر شی که توانایی ارجاع به چیزی را داشته باشد توانایی ارجاع به خود را نیز دارد و به‌صورت بالقوه خودارجاع می‌باشد. این واقعیت شامل همه اشیا مانند جملات، افکار، برنامه‌های کامپیوتری، مدل‌ها، شکل‌ها و غیره می‌شود. به جرأت می‌توان گفت که مشهورترین خودارجاعی، نمونه‌ای است که در «جمله دروغگو» ظاهر شده است:

«این جمله نادرست است»

جمله دروغگو به خاطر عبارت اشاره‌ای «این جمله»، خودارجاعی است. همچنین این جمله (جمله دروغگو) پارادکسی نیز است. پارادکسی بودن جمله دروغگو بدین دلیل است که اگر این جمله درست باشد، آنگاه هر آنچه در این جمله ذکر شده است درست است. ولی این جمله در واقع نادرستی خود را بیان می‌کند. بنابراین اگر جمله نادرست باشد آنگاه جمله درست خواهد بود. در واقع جمله دروغگو درست است اگر و فقط اگر نادرست باشد.

[۳۰] Modus ponens

[۳۱] Self-Referential

فصل ۲

پارادکس یابلو و ناتمامیت حسابی

این فصل که بر اساس مرجع [۱۶] تنظیم شده است، به بحث در مورد پارادوکس یابلو[۱] و ناتمامیت حسابی می‌پردازد. در این فصل، تعدادی قضیه مربوط به پارادوکس یابلو [۲۳] در جملات حساب ارایه می‌شوند. این جملات اولین بار توسط گودل[۲] [۱۲] در مورد تصمیم‌ناپذیری حساب در رابطه با پارادوکس دروغگو بررسی شده‌اند. در این فصل دو نوع مختلف حسابی‌سازی از جملات یابلو، یکی با روش گودل در حسابی‌سازی جمله دروغگو (با نقیض در خارج محمول اثبات‌پذیری) و دیگری با روش یروسلو[۳] [۱۴] در تصمیم‌ناپذیری جملات حساب (با نقیض در داخل محمول اثبات‌پذیری) بیان می‌شوند. هر دو جمله حسابی‌شده یابلو تصمیم‌پذیر بوده و به جمله سازگاری سیستم‌های صوری به روش گودل و یروسلو مربوط می‌باشند. در نهایت، برای جمله هنکین[۴] «من قابل اثبات هستم» با همان دو روشی که گودل و یروسلو جملات را حسابی‌سازی کرده‌اند، ایده‌ای ارایه می‌شود، و قابل اثبات بودن این جمله با استفاده از قضیه لب، مانند اثبات استاندارد جمله هنکین، نشان داده می‌شود.

۱.۲ مقدمه

اکنون در زیر، چند قضیه در مورد جملات حساب که مربوط به پارادوکس یابلو هستند، تقریباً همان‌گونه که جمله تصمیم‌ناپذیر قضیه اول گودل به پارادوکس دروغگو مربوط بودند، معرفی خواهند شد. هر کدام از آنها شامل نمادی است که اسم گودل، یروسلو، یا هنکین را نمایش می‌دهد که معمولاً به عنوان جمله‌ای خود ارجاعی شناخته شده، و به صورت دنباله‌ای از جملات تفکیک می‌شوند که می‌توانند به طور طبیعی به عنوان زنجیره‌ای از ارجاعات ناخوش‌ساخت[۵] قلمداد شوند.
این نتایج جالب هستند، اولاً چون که آنها از ادعای گودل [۱۲] مبنی بر اینکه هر «پارادوکس معرفت شناختی» می‌تواند ما را به نوعی از ناتمامیت ریاضی رهنمون شود، حمایت می‌کنند. و دوم، این‌که

[۱] Yablo's Paradox

[۲] K. Gödel

[۳] G. R. Jeroslow

[۴] L. Henkin

[۵] Non-Well-Founded

آنها پیوندی قوی بین رفتار جملات حسابی معرفی شده در بالا (گودل، هنکین و یروسلو) و رفتار (قسمت‌های بازشده) آنها که در زیر بررسی خواهند شد، را نشان می‌دهند. در صورت عدم وجود یک مثال نقض، این تناظر یک طرح یا الگویی را پیشنهاد می‌کند که می‌تواند به حالت‌های دیگر نیز تعمیم یابد، یا حتی خودش می‌تواند یک نامزدی برای بررسی بیشتر باشد، که این بررسی باید شامل یک صوری سازی[۶] از مفهوم بازشده‌ی منطقی باشد.

۲.۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

روش به کار رفته در اثباتهای زیر کاملاً استاندارد است. ما نسخه متغیر آزاد لم قطری و شرایط اثبات‌پذیری هیلبرت‐ برنِی[۷] را نیاز داریم. ممکن است تعمیم شرایط اثبات‌پذیری $(GD1)$، $(GD2)$، $(GD3)$ تاحدودی ناآشنا باشند. دو مورد آخری را می‌توان در [۴] یافت، و اثبات اولی در یک سیستم مناسب حسابی آسان است. M نمایانگر یک سیستم شمارای کارآمد با قدرتی مانند حساب پئانو (PA) است.

۱.۲.۲ Σ_1 − *فرمول*

تعریف ۱.۲.۲. یک فرمول φ در زبان حساب، Δ_0 نامیده می‌شود هرگاه همه سورهای آن کراندار (به صورت $\forall x \leq t$ یا $\exists x \leq t$) باشند، و Σ_1 نامیده می‌شود هرگاه به شکل $(\exists x_1, \ldots, \exists x_k)\psi$ برای Δ_0 فرمول ψ باشد. به عبارت دیگر فرمولی که بتوان آن را بصورت $\exists x_1, x_2, \cdots, x_n\ A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ نوشت که در آن $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ یک فرمول با سورهای کراندار است را Σ_1 − *فرمول* گویند. (سورهای کراندار به شکل $\forall x \leqslant t \cdots$ یعنی $\forall x(x \leqslant t \to \cdots)$ یا به شکل $\exists x \leqslant t \cdots$ یعنی $\exists x(x \leqslant t \wedge \cdots)$ می‌باشند.) Σ_1 − *فرمول‌ها* تحت اجتماع، اشتراک، سورهای وجودی و سورهای عمومی محدود، بسته‌اند. ⊛

برای مثال همه فرمول‌های اتمی Σ_1 − *فرمول* هستند.

[۶] Formalization

[۷] Hilbert-Bernays

تعریف ۲.۲.۲. $\Box$ را کوتاه‌نوشتی برای محمول اثبات‌پذیری قرار دهید،

$(GD1)$ $\mathsf{M} \vdash \phi(\overline{x}) \Longrightarrow \mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner \phi(\overline{x}) \urcorner)$

$(GD2)$ $\mathsf{M} \vdash \Box(x \to y) \longrightarrow (\Box(x) \to \Box(y))$

$(GD3)$ $\psi(y_1, \ldots, y_k) \in \Sigma_1 \Rightarrow \mathsf{M} \vdash \psi(y_1, \ldots, y_k) \to \Box(\ulcorner \psi(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \urcorner)$

⊛

۲.۲.۲ لم قطری

ما برای بیان و اثبات این قسمت از زبان و نمادگذاری کتاب [۲۰] استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا تعریف نمایش‌پذیری (تعریف ۲.۲.۱) و همچنین توابع و محمول‌هایی که گودل نمایش‌پذیری آنها را در نظریه PA نشان داده است را بیان می‌کنیم.

• $diag(x)$ به این تابع اشاره دارد: «اگر x عدد گودل یک فرمول مانند $A(y)$ با تنها متغیر آزاد y باشد، آنگاه $diag(x)$ عدد گودل فرمول $A(\ulcorner A \urcorner)$ می‌باشد» (یعنی فرمولی که از جایگزینی متغیر آزاد A با عدد گودلی خود A بدست می‌آید).

قضیه ۳.۲.۲. *(لم قطری). فرض کنید که $\varphi(y)$ با تنها متغیر آزاد y فرمولی در زبان PA باشد، آنگاه فرمول بسته (جمله) $\mathcal{G}$ در زبان حساب موجود است که $\mathtt{PA} \vdash \mathcal{G} \longleftrightarrow \varphi(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$.*

برهان. فرض می‌کنیم $\psi(x_1, x_2)$ نمایش دهنده تابع $diag(x)$ باشد. پس برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، اگر $diag(n) = m$ آنگاه

$$\mathtt{PA} \vdash \forall y \big(\psi(\overline{n}, y) \longleftrightarrow y = \overline{m}\big).$$

حال فرمول $\mathcal{F}(x)$ را برابر

$$\exists y \big(\psi(x, y) \wedge \varphi(y)\big)$$

در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\ulcorner \mathcal{F} \urcorner$ همان عدد گودلی $\mathcal{F}(x)$ باشد و $\mathcal{G}$ برابر فرمول

$$\exists x \left[x = \ulcorner \mathcal{F} \urcorner \wedge \exists y \big(\psi(x, y) \wedge \varphi(y)\big)\right]$$

باشد. بنابراین $\mathcal{G}$ برابر فرمول

$$\exists x\big(x = \ulcorner \mathcal{F} \urcorner \wedge \mathcal{F}(x)\big)$$

و به طور منطقی معادل $\mathcal{F}(\ulcorner \mathcal{F} \urcorner)$ یا

$$\exists y\big(\psi(\ulcorner \mathcal{F} \urcorner, y) \wedge \varphi(y)\big)$$

است. $\mathcal{G}$ همان فرمول مورد نظر می‌باشد، چون اگر $\varphi(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$، آنگاه نتیجه می‌شود

$$\exists y\big(\psi(\ulcorner \mathcal{F} \urcorner, y) \wedge \varphi(y)\big)$$

و این همان فرمول $\mathcal{G}$ است؛ اگر $\mathcal{G}$ ، آنگاه از

$$\exists y\big(\psi(\ulcorner \mathcal{F} \urcorner, y) \wedge \varphi(y)\big)$$

نتیجه می‌شود:

$$\big(\psi(\ulcorner \mathcal{F} \urcorner, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \wedge \varphi(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)\big)$$

(چون $\mathtt{PA} \vdash \forall y\, [\psi(\ulcorner \mathcal{F} \urcorner, y) \longleftrightarrow y = \ulcorner \mathcal{G} \urcorner]$) و در نتیجه $\varphi(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. ⊠

قضیه ۴.۲.۲. *(لم قطری تعمیم یافته). فرض کنیم که $\varphi(y, z)$ فرمولی در زبان PA یا زبان حساب با دو متغیر آزاد y, z باشد، در این‌صورت فرمول $\mathcal{G}(z)$ با تنها متغیر آزاد z در زبان PA موجود است که* $\mathtt{PA} \vdash \mathcal{G}(z) \longleftrightarrow \varphi\big(\ulcorner \mathcal{G}(z) \urcorner, z\big)$.

برهان. اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه فوق می‌باشد با این تفاوت که به جای یک متغیر آزاد، دو متغیر آزاد داریم. لذا $diag'(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

• $diag'(x)$ به این تابع اشاره دارد: «اگر x عدد گودل یک فرمول مانند $A(y, z)$ با متغیرهای آزاد y, z باشد، آنگاه $diag'(x)$ عدد گودل فرمول $A(\ulcorner A \urcorner, z)$ می‌باشد» (یعنی فرمولی که از جایگزینی متغیر آزاد y در A با عدد گودلی خود A بدست می‌آید).

فرض می‌کنیم $\psi'(x_1, x_2)$ نمایش دهنده تابع $diag'(x)$ باشد. پس برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، اگر $diag'(n) = m$ آنگاه

$$\texttt{PA} \vdash \forall y\big(\psi'(\overline{n}, y) \longleftrightarrow y = \overline{m}\big).$$

حال فرمول $\mathcal{F}(x, z)$ را برابر

$$\exists y\big(\psi'(x, y) \wedge \varphi(y, z)\big)$$

در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\ulcorner\mathcal{F}\urcorner$ همان عدد گودلی $\mathcal{F}(x, z)$ باشد و $\mathcal{G}(z)$ برابر فرمول

$$\exists x\left[x = \ulcorner\mathcal{F}\urcorner \wedge \exists y\big(\psi'(x, y) \wedge \varphi(y, z)\big)\right]$$

باشد. بنابراین $\mathcal{G}(z)$ برابر فرمول

$$\exists x\big(x = \ulcorner\mathcal{F}\urcorner \wedge \mathcal{F}(x, z)\big)$$

و به طور منطقی معادل $\mathcal{F}(\ulcorner\mathcal{F}\urcorner)$ یا

$$\exists y\big(\psi'(\ulcorner\mathcal{F}\urcorner, y) \wedge \varphi(y, z)\big)$$

است. $\mathcal{G}(z)$ همان فرمول مورد نظر می‌باشد، چون اگر $\varphi(\ulcorner\mathcal{G}(z)\urcorner)$، آنگاه نتیجه می‌شود

$$\exists y\big(\psi'(\ulcorner\mathcal{F}\urcorner, y) \wedge \varphi(y, z)\big)$$

و این همان فرمول $\mathcal{G}(z)$ است؛ اگر $\mathcal{G}(z)$ ، آنگاه از

$$\exists y\big(\psi'(\ulcorner\mathcal{F}\urcorner, y) \wedge \varphi(y, z)\big)$$

نتیجه می‌شود:

$$\big(\psi'(\ulcorner\mathcal{F}\urcorner,\ulcorner\mathcal{G}(z)\urcorner)\wedge\varphi(\ulcorner\mathcal{G}(z)\urcorner)\big)$$

(چون $\big(\mathtt{PA}\vdash\forall y\left[\psi'(\ulcorner\mathcal{F}\urcorner,y)\longleftrightarrow y=\ulcorner\mathcal{G}(z)\urcorner\right]$ و در نتیجه $\varphi(\ulcorner\mathcal{G}(z)\urcorner)$. $\boxtimes$

۳.۲.۲ قضیه لُب

در مورد این قضیه نیز از نمادگذاری کتاب [۲۰] استفاده می‌کنیم، برای اثبات این قضیه به اصول زیر (اصول هیلبِرت–بِرنِی–لُب) نیاز داریم:

$(C1)$ $\quad \mathbf{T}\vdash\varphi\Longrightarrow\mathbf{T}\vdash\Box\varphi.$

$(C2)$ $\quad \mathbf{T}\vdash\Box(\varphi\rightarrow\psi)\longrightarrow(\Box\varphi\rightarrow\Box\psi).$

$(C3)$ $\quad \mathbf{T}\vdash\Box\varphi\longrightarrow\Box\Box\varphi.$

قضیه ۵.۲.۲. (قضیه لُب). *اگر φ یک فرمول بسته (جمله) باشد آنگاه از $\mathbf{T}\vdash\Box\varphi\longrightarrow\varphi$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{T}\vdash\varphi$.*

برهان. فرض می‌کنیم که:

(۱) $\quad \mathbf{T}\vdash\Box\varphi\longrightarrow\varphi$

طبق لم قطری جمله γ چنان وجود دارد که:

(۲) $\quad \mathbf{T}\vdash\gamma\longleftrightarrow(\Box\gamma\rightarrow\varphi)$

(۳) از (۲)

$\mathbf{T}\vdash\gamma\longrightarrow(\Box\gamma\rightarrow\varphi)$

(۴) از (۳) با $(C1)$

$\mathbf{T}\vdash\Box\left[\gamma\longrightarrow(\Box\gamma\rightarrow\varphi)\right]$

(۵) از (۴) با $(C2)$

$\mathbf{T}\vdash\Box\gamma\longrightarrow\Box(\Box\gamma\longrightarrow\varphi)$

(۶) از (۵) با $(C2)$

$\mathbf{T} \vdash \Box\gamma \longrightarrow (\Box\Box\gamma \rightarrow \Box\varphi)$

(۷) از (۶) داریم:

$\mathbf{T} \vdash [\Box\gamma \longrightarrow (\Box\Box\gamma \rightarrow \Box\varphi)] \longrightarrow [(\Box\gamma \rightarrow \Box\Box\gamma) \longrightarrow (\Box\gamma \rightarrow \Box\varphi)]$

(۸) از (۶) و (۷) با MP

$\mathbf{T} \vdash [(\Box\gamma \rightarrow \Box\Box\gamma) \longrightarrow (\Box\gamma \rightarrow \Box\varphi)]$

(۹) $(C3)$

$\mathbf{T} \vdash \Box\gamma \longrightarrow \Box\Box\gamma$

(۱۰) از (۸) و (۹) با MP

$\mathbf{T} \vdash \Box\gamma \longrightarrow \Box\varphi$

(۱۱) از (۱) و (۱۰)

$\mathbf{T} \vdash \Box\gamma \longrightarrow \varphi$

(۱۲) از حالت برگشت (۲) و (۱۱) با MP

$\mathbf{T} \vdash \gamma$

(۱۳) از (۱۲) با $(C1)$

$\mathbf{T} \vdash \Box\gamma$

(۱۴) از (۱۱) و (۱۳) با MP

$\mathbf{T} \vdash \varphi$

$\boxtimes$

لم ۶.۲.۲. (قضیه تعمیم‌یافته لُب). *از* $(GD1)$–$(GD3)$ *استنباط می‌شود که* $\mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner\phi(\overline{x})\urcorner) \rightarrow \phi(x)$ *نتیجه می‌دهد* $\mathsf{M} \vdash \phi(x)$ *را.*

برهان. با بررسی تعریف (۲.۲.۲)، می‌بینیم که $(GD1)$ و $(GD2)$ تعمیم‌یافته‌های به ترتیب $(C1)$ و $(C2)$ برای حالت یک متغیر آزاد می‌باشند، و $(C3)$ را به صورت زیر می‌توان تعمیم داد:

$$(C'3). \quad \mathbf{T} \vdash \Box(\ulcorner\phi(\overline{x})\urcorner) \longrightarrow \Box\Box(\ulcorner\phi(\overline{x})\urcorner).$$

از فرض داریم:

1. $\mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner\phi(\overline{x})\urcorner) \longrightarrow \phi(x).$

حال طبق لم قطری فرمول $\gamma(x)$ با متغیر آزاد x چنان وجود دارد که داریم:

2. $\mathsf{M} \vdash \gamma(x) \longleftrightarrow \big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \phi(x)\big]$

3. $\mathsf{M} \vdash \gamma(x) \longrightarrow \big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \phi(x)\big]$ از 2

4. $\mathsf{M} \vdash \Box\{\gamma(x) \longrightarrow \big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \phi(x)\big]\}$ از 3 با $(GD1)$

5. $\mathsf{M} \vdash \Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \longrightarrow \Box\,\big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \phi(x)\big]$ از 4 با $(GD2)$

6. $\mathsf{M} \vdash \Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \longrightarrow \big[\Box\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \Box\big(\phi(\overline{x})\big)\big]$ از 5 با $(GD2)$

از 6 داریم:

7. $\mathsf{M} \vdash \{\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \longrightarrow \big[\Box\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \Box\big(\phi(\overline{x})\big)\big]\} \longrightarrow$
$\{\big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \Box\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big)\big] \longrightarrow \big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \Box\big(\ulcorner\phi(\overline{x})\urcorner\big)\big]\}$

از 7 و 6 با *MP*

8. $\mathsf{M} \vdash \big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \Box\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big)\big] \longrightarrow \big[\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \to \Box\big(\ulcorner\phi(\overline{x})\urcorner\big)\big]$

9. $\mathsf{M} \vdash \Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \longrightarrow \Box\Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big)$ $(C'3)$

10. $\mathsf{M} \vdash \Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \longrightarrow \Box\big(\ulcorner\phi(\overline{x})\urcorner\big)$ از 8 و 9 با *MP*

11. $\mathsf{M} \vdash \Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big) \longrightarrow \phi(x)$ از 1 و 10

12. $\mathsf{M} \vdash \gamma(x)$ از حالت برگشت 2 و 11 با *MP*

13. $\mathsf{M} \vdash \Box\big(\ulcorner\gamma(\overline{x})\urcorner\big)$ از 12 با $(GD1)$

14. $\mathsf{M} \vdash \phi(x)$ از 11 و 13 با *MP*

$\boxtimes$

تعریف ۷.۲.۲. اگر y یک متغیر آزاد باشد، قرار دهید

$$\mathsf{M} \vdash Y^J(y) \leftrightarrow (\forall x > y)[\Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{x})\urcorner)]$$

$$\mathsf{M} \vdash Y^G(y) \leftrightarrow (\forall x > y)[\neg\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)]$$

$$\mathsf{M} \vdash Y^H(y) \leftrightarrow (\forall x > y)[\Box(\ulcorner Y^H(\overline{x})\urcorner)]$$

$\circledast$

ملاحظه ۸.۲.۲. با بررسی تعاریف، دیده می‌شود که اگر $z > x$ آنگاه $\mathsf{M} \vdash Y^{J/G/H}(\overline{z}) \to Y^{J/G/H}(\overline{x})$. $\circledcirc$

تذکر ۹.۲.۲. قضیه‌های زیر را بدون اثبات می‌پذیریم [۱۱] و [۴].

- (الف) Σ_1 – *تمامیت*: برای هر Σ_1 – *فرمول* σ؛

$$\mathbb{N} \vDash \sigma \Longrightarrow \mathtt{PA} \vdash \sigma.$$

بعبارت دیگر اگر $\phi(x)$ یک Σ_1 – *فرمول* با تنها متغیر آزاد x باشد، اگر داشته باشیم $\mathbb{N} \vDash (\exists x)\phi(x)$ آنگاه داریم: $\mathtt{PA} \vdash (\exists x)\phi(x)$.

- (ب) Σ_1 – *تمامیت صوری*: برای هر Σ_1 – *فرمول* σ؛

$$\mathtt{PA} \vdash \sigma \longrightarrow \Box\sigma.$$ $\circledcirc$

۴.۲.۲ سازگاری

تعریف ۱۰.۲.۲. یک مجموعه Σ از از فرمول‌ها را سازگار گویند اگر از آن یک تناقض حاصل نشود. به عبارت دیگر، فرمولی مانند α یافت نشود به طوری که هم $\Sigma \vdash \alpha$ و هم $\Sigma \vdash \neg\alpha$. در غیر این صورت مجموعه Σ را ناسازگار گویند. $\circledast$

مفهوم ωـ سازگاری توسط گودل و به منظور بیان فرض‌های مورد نیاز برای قضیه اول ناتمامیت

تعریف شد. ωـ سازگاری $\mathbf{T}$ شرایط به حد کافی بهینه و شهودی را برای قضیه فراهم نمی‌کند. با این وجود در این بحث، بسیار قاطعانه در موضوعاتی که مجبور به استفاده از آن هستیم، نفوذ می‌کند.

تعریف ۱۱.۲.۲. نظریه $\mathbf{T}$ در یک زبان شامل $\{0,S\}$ که 0 نماد ثابت و S نماد تابعی یک‌موضعی است و $\overline{n} = SS\ldots S(0)$، را $\omega -$ *سازگار* سازگار نامند هرگاه برای هر فرمول $\varphi(x)$ (با تنها متغیر آزاد x) در زبان حساب، شرط زیر برقرار باشد:

اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbf{T} \vdash \varphi(\overline{n})$ آنگاه $\mathbf{T} \nvdash \exists x \neg\varphi(x)$.

به عبارت دیگر نظریه $\mathbf{T}$، $\omega -$ *سازگار* است اگر فرمول $\varphi(x)$ (با تنها متغیر آزاد x) موجود نباشد به‌طوری که برای هر n طبیعی ($n \in \mathbb{N}$)، داشته باشیم $\mathbf{T} \vdash \varphi(\overline{n})$؛ و در عین حال $\mathbf{T} \vdash \exists x \neg\varphi(x)$. $\omega -$ *سازگاری* یک نظریه طبق گزاره زیر، سازگاری آن نظریه را نیز نتیجه می‌دهد، اما از سازگاری یک نظریه نمی‌توان $\omega -$ *سازگاری* آن را نتیجه گرفت. $\circledast$

گزاره ۱۲.۲.۲. *اگر نظریه $\mathbf{T}$، $\omega -$ سازگار باشد آنگاه سازگار است.*

برهان. فرض می‌کنیم فرمول $\mathsf{B}(x)$ فقط شامل یك متغیر آزاد x باشد و فرمول $\varphi(x)$ را به صورت $\varphi(x) = \mathsf{B}(x) \wedge \neg\mathsf{B}(x)$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\mathsf{B}(x) \wedge \neg\mathsf{B}(x)$ یك تناقض می‌باشد پس $\neg\varphi(x)$ یك توتولوژی است. بنابراین $\forall n \in \mathbb{N} : \quad \mathbf{T} \vdash \neg\varphi(\overline{n})$ و چون بنابه فرض $\mathbf{T}$، ωـ سازگار است پس $\mathbf{T} \nvdash \exists x \varphi(x)$. بنابراین نظریه‌ی $\mathbf{T}$ سازگار است. $\boxtimes$

تعریف ۱۳.۲.۲. نظریه حسابی $\mathbf{T}$ را 1ـ سازگار گوییم اگر و فقط اگر هیچ Δ_0ـ فرمولی مانند $\phi(x)$ موجود نباشد که $\mathbf{T} \vdash \neg\forall x\ \phi(x)$ و برای هر $m \in \mathbb{N}$ نیز $\mathbf{T} \vdash \phi(\overline{m})$.

به‌طور معادل: نظریه حسابی $\mathbf{T}$ را 1ـ سازگار گوییم هر گاه هیچ Δ_0ـ فرمولی مانند $\phi(x)$ موجود نباشد که به‌طور همزمان داشته باشیم $\mathbf{T} \vdash \exists x\ \phi(x)$ و برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\mathbf{T} \vdash \neg\phi(\overline{m})$. $\circledast$

مثال ۱۴.۲.۲. زبان $\mathcal{L}$ را به صورت $\mathcal{L} = \{0, S, \alpha\}$ که در آن S تابعی یک موضعی و α ثابت (مخالف صفر) است، در نظر گرفته و فرض می‌کنیم نظریه‌ی $\mathbf{T}$ با فرمولهای زیر اصل موضوعی شده باشد:

(1) $S(x) \neq 0$

(2) $S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

(3) $S(\alpha) = \alpha$

در این صورت برای هر تِرم t که فقط از 0 و S تشکیل شده است، با استقراء روی t در فرازبان ثابت می‌شود که $\mathbf{T} \vdash \neg(S(\bar{t}) = \bar{t})$ (با استفاده از (1) و (2)) و از طرفی طبق شرط (3)، یعنی $S(\alpha) = \alpha$، خواهیم داشت $\mathbf{T} \vdash \exists x(S(x) = x)$. بنابراین $\mathbf{T}$، ωـ سازگار نیست. ◎

حال $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ و $1-\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ و $\omega-\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم. $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ و $1-\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ و $\omega-\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ جملاتی در زبان حساب می‌باشد با این مفهوم که $\mathbf{T}$ به ترتیب سازگار و 1ـ سازگار و ωـ سازگار است. برای مثال

$$\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow \neg\mathsf{Pr}_{\mathbf{T}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

و

$$\omega-\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow (\forall x)\left[(\forall y)\mathsf{Pr}_{\mathbf{T}}\big(x(\bar{y})\big) \rightarrow \neg\mathsf{Pr}_{\mathbf{T}}\big((\exists x)\neg x(y)\big)\right]$$

که در آن $\bar{y}$ عدد یا شماره‌ی y را مشخص می‌کند. (یعنی $\bar{y} = \underbrace{SS...S(0)}_{y}$ وقتی S، y بار تکرار می‌شود).

۳.۲ ناتمامیت در یک نگاه

کورت گودل (زاده‌ی ۲۸ آوریل ۱۹۰۶ در شهر برنو در پادشاهی اتریش‌ـ مجارستان [جمهوری چک امروزی]، در گذشته‌ی ۱۴ ژانویه ۱۹۷۸ در شهر پرینستون، ایالت نیوجرسی آمریکا) ریاضی‌دان، منطق‌دان و فیلسوف اتریشی بود. در سال ۱۹۲۹، در سن ۲۳ سالگی، پایان‌نامه دکتری‌اش را با راهنمایی آقای هانس‌هان تمام کرد. در پایان‌نامه دکتری‌اش، گودل تمامیت حساب محمولات مرتبه اول را اثبات کرده بود. در سال ۱۹۳۱ و زمانی که هنوز در وین بود قضایای ناتمامیت را منتشر کرد. وی اثبات کرده بود که برای هر نظام اصل‌موضوعی محاسبه‌پذیر، چنانچه بتوان اصول

موضوعه حساب پئانو را در آن بیان کرد، آنگاه اگر این نظام سازگار باشد، نمی‌تواند سازگاری این نظام را در خود آن ثابت کند.

۱.۳.۲ قضیه اول ناتمامیت گودل

قضیه ۱.۳.۲. *فرض کنید که $\mathbf{T}$ یک نظریه صوری شامل حساب باشد، یک جمله φ وجود دارد که اثبات‌ناپذیر بودن خودش را بیان می‌کند و به گونه‌ای است که:*

(۱) *اگر $\mathbf{T}$ سازگار باشد آنگاه $\mathbf{T} \nvdash \varphi$.*

(۲) *اگر $\mathbf{T}$ ، $\omega -$ سازگار باشد آنگاه $\mathbf{T} \nvdash \neg\varphi$.*

۲.۳.۲ قضیه دوم ناتمامیت گودل

قضیه ۲.۳.۲. *اگر $\mathbf{T}$ یک نظریه صوری سازگار شامل حساب باشد، آنگاه $\mathbf{T} \nvdash \mathsf{Con}(\mathbf{T})$ که در آن $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ بیانگر سازگاری $\mathbf{T}$ است.*

۴.۲ قضیه‌ها

قضیه ۱.۴.۲.

۱ . *برای هر k*

(الف) *اگر $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) - 1$ ، آنگاه $\mathsf{M} \nvdash Y^J(\overline{k})$.*

(ب) *اگر $\mathsf{Con}(\mathsf{M})$ ، آنگاه $\mathsf{M} \nvdash \neg Y^J(\overline{k})$.*

۲ . *برای هر k*

(الف) *اگر $\mathsf{Con}(\mathsf{M})$ ، آنگاه $\mathsf{M} \nvdash Y^G(\overline{k})$.*

(ب) *اگر $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) - 1$ ، آنگاه $\mathsf{M} \nvdash \neg Y^G(\overline{k})$.*

۳. $\mathsf{M} \vdash Y^H(k)$.

برهان. برای (۱) ، (الف) فرض کنید که $\mathsf{M} \vdash Y^J(\overline{k})$. آنگاه (با توجه به تعریف ۷.۲.۲) واضح است که $\mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{k}+1)\urcorner)$، لذا با $1-\mathsf{Con}(\mathsf{M})$ داریم $\mathsf{M} \vdash \neg Y^J(\overline{k}+1)$، که با توجه به ملاحظه ۸.۲.۲ با $Y^J(\overline{k})$ در تضاد است.

(ب) فرض کنید که $\mathsf{M} \vdash \neg Y^J(\overline{k})$. این معادل $\mathsf{M} \vdash (\exists x > \overline{k})[\neg\Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{x})\urcorner)]$ است، که قضیه دوم ناتمامیت را نقض می‌کند. (زیرا طبق فرض قضیه، M سازگار است، پس طبق قضیه دوم ناتمامیت باید $\mathsf{M} \nvdash (\exists x > \overline{k})[\neg\Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{x})\urcorner)]$، واین با نتیجه حاصله از فرض خلف فوق در تضاد است).

برای (۲)، (الف) فرض کنید که $\mathsf{M} \vdash Y^G(\overline{k})$. آنگاه واضح است که $\mathsf{M} \vdash \neg\Box(\ulcorner Y^G(\overline{k}+1)\urcorner)$، اما با توجه به ملاحظه ۸.۲.۲، داریم $\mathsf{M} \vdash Y^G(\overline{k}+1)$، و به همین ترتیب $\mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner Y^G(\overline{k}+1)\urcorner)$، که ناقض سازگاری M است. (زیرا هم زمان M، هم $\Box(\ulcorner Y^G(\overline{k}+1)\urcorner)$ را اثبات می‌کند و هم نقیض‌اش را، و این به معنای نقض سازگاری M است).

(ب) فرض کنید $\mathsf{M} \vdash \neg Y^G(\overline{k})$. پس $\mathsf{M} \vdash (\exists x > \overline{k})[\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)]$. توسط $1-$سازگاری، و Σ_1ــ*تمامیت* برای x، بدست می‌آوریم که $\mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)$، و با بکاربردن دوباره $1-$ سازگاری، $\mathsf{M} \vdash Y^G(\overline{x})$ را بدست می‌آوریم، و این با توجه به بخش اول استدلال غیرممکن است.

برای (۳) می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner Y^H(\overline{k})\urcorner) \to Y^H(k)$. و با توجه به (قضیه تعمیم‌یافته لُب در لم (۶.۲.۲)). اگر در M فرض کنیم $\Box(\ulcorner Y^H(\overline{k})\urcorner)$، توسط $(GD1)$، $(GD2)$، خواهیم داشت

$$\Box(\ulcorner(\forall x > \overline{k})[\Box(\ulcorner Y^H(\overline{x})\urcorner)]\urcorner). \qquad (\gamma)$$

عدد $x > k$ را در M، دلخواه می‌گیریم. توسط $(GD3)$، و از آنجا که «$x > k$» یک Σ_1 فرمول است، داریم $\Box(\ulcorner\overline{x} > \overline{k}\urcorner)$. سپس توسط (γ)، و $(GD1)$، $(GD2)$، داریم $\Box(\ulcorner(\forall z > \overline{x})[\Box(\ulcorner Y^H(\overline{z})\urcorner)]\urcorner)$. لذا توسط $(GD1)$ و $(GD2)$، نتیجه می‌گیریم که

$\Box(\ulcorner Y^H(\overline{x})\urcorner)$. از آنجا که $x > k$ دلخواه بود، داریم $(\forall x > k)[\Box(\ulcorner Y^H(\overline{x})\urcorner)]$. پس $Y^H(k)$، که با فرض نتیجه می‌دهد $\mathsf{M} \vdash \Box(\ulcorner Y^H(\overline{k})\urcorner) \to Y^H(k)$، و از آنجا، توسط قضیه تعمیم‌یافته لُب (۶.۲.۲)، داریم $\mathsf{M} \vdash Y^H(k)$. ☒

قضیه ۲.۴.۲. *k را یک متغیر آزاد بگیرید. آنگاه*

$$\mathsf{M} \vdash \mathsf{Con}(\mathsf{M}) \leftrightarrow Y^G(k).$$

برهان. استدلال راست به چپ واضح است. برای چپ به راست، از استدلال قسمت ۲، قضیه ۱.۴.۲ استفاده می‌کنیم، فرض کنیم $x > k$ در M دلخواه باشد. پس، برای رد کردن $\mathsf{Con}(\mathsf{M})$، در M فرض می‌کنیم $\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)$. پس از اینجا توسط $(GD1)$ و $(GD2)$، داریم $\Box(\ulcorner\neg\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x}+1)\urcorner)\urcorner)$، همچنین $\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)$. که از آن توسط $(GD3)$ نتیجه می‌گیریم $\Box(\ulcorner\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x}+1)\urcorner)\urcorner)$. این‌دو با هم $\neg\mathsf{Con}(\mathsf{M})$ را نتیجه می‌دهند. بنابراین، با توجه به فرض و با عکس‌نقیض کردن داریم $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to \neg\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)$. از دلخواه بودن $x > k$ داریم، $(\forall x > k)[\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to \neg\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)]$، بنابراین با بکار بردن قاعده استاندارد سورها نتیجه می‌گیریم که $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to (\forall x > k)[\neg\Box(\ulcorner Y^G(\overline{x})\urcorner)]$. پس $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to Y^G(k)$. ☒

قضیه ۳.۴.۲. *k را یک متغیر آزاد بگیرید، آنگاه*

$$\mathsf{M} \vdash \mathsf{Con}(\mathsf{M}) \leftrightarrow \neg Y^J(k).$$

برهان. استدلال راست به چپ واضح است. برای چپ به راست، فرض کنیم که $x > k$ در M دلخواه بوده و $\Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{x})\urcorner)$. پس توسط $(GD1)$ و $(GD2)$ داریم $\Box(\ulcorner(\exists y > \overline{x})[\neg\Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{y})\urcorner)]\urcorner)$، و از آنجا $\Box\mathsf{Con}(\mathsf{M})$. با بکار بردن حالت صوری قضیه دوم گودل نتیجه می‌گیریم، $\Box(\ulcorner\mathsf{Con}(\mathsf{M})\urcorner) \to \neg\mathsf{Con}(\mathsf{M})$، بنابراین $\neg\mathsf{Con}(\mathsf{M})$ استنباط می‌شود. پس، با توجه به فرض و عکس‌نقیض‌کردن داریم، $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to \neg\Box(\ulcorner Y^J(\overline{x})\urcorner)$. با توجه به این‌که $x > k$ دلخواه است، واضح است که $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to (\forall x > k)[\neg\Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{x})\urcorner)]$، لذا مستقیماً نتیجه می‌گیریم $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to (\exists x > k)[\neg\Box(\ulcorner\neg Y^J(\overline{x})\urcorner)]$، و در نتیجه $\mathsf{Con}(\mathsf{M}) \to \neg Y^J(k)$. ☒

فصل ۳

صوری‌سازی دنباله یابلو

مقدمه

در این فصل بررسی می‌کنیم که هرگاه در پارادکس یابلو به جای عملگر «صدق» از «اثبات‌پذیری» استفاده کنیم چه اتفاقی می‌افتد. با استفاده از روش قطری‌سازی، دنباله‌های مناسبی از جملات می‌توانند ساخته شوند. در حقیقت، این دنباله‌ها توسط هیچ نظریه به اندازه کافی قوی و سازگار، تصمیم‌پذیر نیستند. هرگاه محمول اثبات‌پذیری، شرایط اثبات‌پذیری را ارضا کند، هر چنین جمله‌ای به‌طور اثبات‌پذیر با سازگاری و با جمله گودلی معادل خواهد بود. بنابراین هر دو این‌گونه جملات با یکدیگر بطور اثبات‌پذیر معادل هستند.

۱.۳ جایگزینی عملگر صدق با اثبات‌پذیری

روش اول این است که ناتمامیت چندین نظریه ریاضی را در نظر گرفته و جملات گودلی را با کاربرد آنها در صوری سازی‌های مختلف از پارادکس یابلو مقایسه کنیم. جمله دروغگو اذعان بر نادرستی خود دارد و بدین صورت است:

(λ) *جمله (λ) نادرست است.*

یک جمله گودل (رمزنگاری مناسب نحو) اذعان به اثبات‌ناپذیر بودن خودش دارد (جمله گودل از جایگذاری واژه «اثبات‌پذیری» به جای «درستی» در جمله دروغگو به‌دست می‌آید):

$(\mathbf{G})$ *جمله $(\mathbf{G})$ اثبات‌پذیر نیست (در سیستم).*

بنابراین، می‌بینیم که پدیده ناتمامیت گودل در حقیقت از تبدیل یک پارادکس (دروغگو) به یک قضیه حاصل می‌شود[۱]. تبدیل پارادکس‌ها به قضایای ریاضی یک روند تکاملی و رایج در منطق

[۱] یک پدیده نسبتاً شایع این است که گودل مابین این قضیه و پارادکس دروغگو یک ارتباط نزدیکی مشاهده کرده، و به نظر می‌رسد که این الهام از پارادکس‌ها در ذهنش نقش بسته است. دیگر پارادکس‌های معنایی (Semantic) در برهان‌های (اثبات) ناتمامیت کاربرد دارند [۶]. از این جمله، پارادکس گرلینگ در اثبات قضیه دوم ناتمامیت گودل به کار می‌رود. در اثباتی که هیچ مجموعه کلی (همگانی) در ZFC وجود ندارد نتیجه‌ای از صوری‌سازی پارادکس راسل را می‌توان مشاهده کرد، و اما طبق قضیه هارتق و نتیجه‌ی آن، هیچ مجموعه تماماً مرتب وجود ندارد که بتوان نتیجه‌ای از صوری‌سازی بورالی–فورتی را در آن مشاهده کرد.
البته، فرض صحت (درستی) برای اثبات اصلی گودل در تمامیت لازم نیست، و در این مورد نگرانی وجود ندارد.

ریاضی می‌باشد. این روند بارها و بارها در منطق ریاضی رخ داده است که از آن جمله می‌توان به تبدیل پارادکس دروغگو به قضیه ناتمامیت گودل، تبدیل پارادکس راسل به قضیه‌ای در نظریه مجموعه‌ها و استفاده از پارادکس گرلینگ و پارادکس آزمون ناگهانی برای اثبات قضیه دوم ناتمامیت گودل، اشاره کرد. با طرح و مقایسه استدلال‌های مناسب قرار می‌دهیم:

$$
\begin{array}{ccc}
\neg\mathsf{Tr}(\lambda) & (\mathit{excluded\ middle}) & \mathsf{Tr}(\lambda) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\neg(\lambda) & (\mathit{Schema}\ \mathbf{T}) & (\lambda) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{Tr}(\lambda) & \mathit{content\ of}\ (\lambda) & \neg\mathsf{Tr}(\lambda)
\end{array}
$$

شکل ۱.۳: نمای کلی پارادکس دروغگو

اگر بخواهیم پارادکس دروغگو را در یک نمای کلی نمایش دهیم شکل فوق را خواهیم داشت. همان‌طور که دیده می‌شود در جمله دروغگو، ادعای نادرست بودن (λ) دقیقاً با ادعای درست بودن آن معادل است، بنابراین به وضوح پارادکس داریم.
حال سوال این‌است که اگر جای «صدق» را با «اثبات‌پذیری» عوض کنیم، با فرض درستی نظریه مورد بحث، چه اتفاقی رخ خواهد داد؟

$$
\begin{array}{ccc}
\neg\mathsf{Prov}(\mathbf{G}) & (\mathit{excluded\ middle}) & \mathsf{Prov}(\mathbf{G}) \\
{\scriptstyle ??}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathit{Soundness})} \\
 & & (\mathbf{G}) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (\mathit{Content\ of}(\mathbf{G}))} \\
 & & \neg\mathsf{Prov}(\mathbf{G})
\end{array}
$$

شکل ۲.۳: اثبات‌پذیری به جای صدق

مادامی که طرف راست از میان برود، طرف چپ پس‌زمینه کاری انجام نمی‌دهد، زیرا فرض بر این نبود که صدق، اثبات‌پذیر باشد (برای مثال از $\neg\phi$ نمی‌توان $\neg\mathsf{Prov}(\phi)$ را استنتاج کرد). به عبارت دیگر، با در نظر گرفتن $\mathsf{Prov}(\mathbf{G})$ (اثبات‌پذیری جمله $\mathbf{G}$) به همراه درستی نظریه مورد بحث به سرعت به $\neg\mathsf{Prov}(\mathbf{G})$ می‌رسیم که یک تناقض است. در حالی که فرض $\neg\mathsf{Prov}(\mathbf{G})$ به هیچ چیزی ختم نمی‌شود و این بدین دلیل است که ما اثبات‌پذیری گزاره صدق را فرض نکرده‌ایم و بنابراین نمی‌توان از $\neg\mathsf{Prov}(\mathbf{G})$ به $\neg\mathbf{G}$ و در نتیجه به $\mathsf{Prov}(\mathbf{G})$ رسید. لذا به جای داشتن یک پارادکس، این بار فقط نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{G}$ در نظریه مورد نظر اثبات‌پذیر نیست. دقیقاً همین شرایط برای حالتی که $\mathsf{Prov}(\neg\mathbf{G})$ را در نظر می‌گیریم برقرار است (شکل زیر):

$$
\begin{tikzcd}
\neg\mathsf{Prov}(\neg\mathbf{G}) \arrow[d, "??"'] & (excluded\ middle) & \mathsf{Prov}(\mathbf{G}) \arrow[d, "(Soundness)"] \\
{} & & \neg\mathbf{G} \arrow[d, "(Content\ of(\mathbf{G}))"] \\
 & & \neg\neg\mathsf{Prov}(\mathbf{G}) \arrow[d, "classical\ logic"] \\
 & & \mathsf{Prov}(\mathbf{G}) \arrow[d, "soundness"] \\
 & & \mathbf{G}
\end{tikzcd}
$$

شکل ۳.۳: اثبات‌پذیری به جای صدق

با توجه به شکل فوق می‌بینیم که از اثبات‌پذیری $\neg\mathbf{G}$ به راحتی می‌توان $\mathbf{G}$ را نتیجه گرفت که می‌گوید $\mathbf{G}$ اثبات‌پذیر نیست (یعنی $\neg\mathsf{Prov}\ \mathbf{G}$) و این یک تناقض است. به عبارت دیگر، اگر $\neg\mathbf{G}$ اثبات‌پذیر باشد می‌توان درستی $\mathbf{G}$ را نتیجه گرفت. از طرف دیگر، فرض اثبات‌پذیری $\neg\mathbf{G}$ منجر به یک تناقض می‌شود و بنابراین هیچ کدام از جملات $\mathbf{G}$ و $\neg\mathbf{G}$ در سیستم مورد بحث قابل اثبات

نیستند ولی هیچ پارادکسی رخ نمی‌دهد. (در حقیقت اگر $\mathbf{T}$ نظریه مورد بحث ما باشد آنگاه برای جمله $\mathbf{G}$ داریم: $\mathbf{T} \nvdash \mathbf{G}$ و $\mathbf{T} \nvdash \neg\mathbf{G}$).

این سوال در این جا به ذهن می‌رسد که این پدیده تا چه حد عمومیت دارد: آیا پارادکس دیگری شبیه به پارادکس دروغگو وجود دارد که اگر به جای «صدق» در آن از واژه «اثبات‌پذیری» استفاده کنیم منجر به یک قضیه در منطق ریاضی شود؟ در بخش بعد برای رسیدن به پاسخ این سوال، پارادکس یابلو، که به نظر می‌رسد با پارادکس‌های دیگر تفاوتی اساسی دارد، را مورد بحث قرار خواهیم داد.

۲.۳ پارادکس یابلو: یک فرمول‌بندی

پارادکس یابلو اولین بار در [۲۳] توسط یابلو معرفی و فرمول‌بندی شد. یک دنباله نامتناهی $s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots$ از جملات را در نظر می‌گیریم به طوری که:

$$s_0 = `\forall x(P_1(x) \longrightarrow \neg\mathsf{Tr}(x))',$$

$$s_1 = `\forall x(P_2(x) \longrightarrow \neg\mathsf{Tr}(x))',$$

$$s_2 = `\forall x(P_3(x) \longrightarrow \neg\mathsf{Tr}(x))',$$

$$\vdots$$

که در آن Tr همان محمول صدق (درستی) است، و P_n به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ تعبیر $\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots\}$ را دارد. بنابراین، هر s_i می‌گوید که برای $j > i$ تمامی s_jها نادرست هستند. اکنون فرض کنید s_0 درست باشد. آنگاه برای هر $k > 0$، s_k نادرست است (که s_1 از جمله همان فرمول‌هاست و لذا نادرست است). بنابراین، s_k به ازای هر $k > 1$ نادرست است. اما این همان چیزی است که s_1 گفته می‌شود، از این رو s_1 پس از همه درست است. تناقض. فرض کنید که s_0 نادرست است. یک $k > 0$ موجود است به طوری که s_k درست است. اما می‌توان این استدلال را

تکرار کرد، اکنون با تکرار دو باره در s_k به یک تناقض می‌رسیم. این مهم نیست که s_0 را درست یا غلط فرض کنیم در هر صورت به یک تناقض بر می‌خوریم. بنابراین پارادکس[۱] داریم.

۳.۳ پارادکس یابلو همراه با اثبات‌پذیری، یک استدلال سطحی

اکنون $\mathbf{T}$ را یک نظریه حساب در یک زبان به اندازه کافی قوی در نظر گرفته و بررسی می‌کنیم که وقتی Tr جایگزین Prov در یک دنباله یابلویی می‌شود چه اتفاقی می‌افتد؟ ابتدا نوعی از استدلال پیچیده بطور غیر دقیق توصیف خواهد شد، که بدون توجه به جزئیات و بدون اطمینان از استدلال درون سیستم می‌تواند نمایش داده شود.

حال زبان استاندارد حساب را با افزودن نماد تابعی جدید «f» گسترش می‌دهیم. به گونه‌ای که تابع f به هر عدد طبیعی n، عدد گودل nامین جمله یابلو را بدست می‌دهد. (البته با جایگزینی اثبات‌پذیری (Prov) به جای محمول درستی (Tr)):

$$f(n) = \ulcorner \forall x > \overline{n} \quad \neg \mathsf{Prov}(f(x)) \urcorner \tag{۱.۳}$$

(نماد $\overline{n}$ برای عددی بر مبنای n به کار می‌رود).

اکنون فرض کنید نظریه $\mathbf{T}$ فرمول با عدد گودل $f(n)$ را اثبات می‌کند. یعنی:

$$\mathbf{T} \vdash \forall x > \overline{n} \quad \neg \mathsf{Prov}(f(x)). \tag{۲.۳}$$

از این که نظریه $\mathbf{T}$ ضعیف شده معادله (۱.۳) را اثبات می‌کند نتیجه می گیریم:

$$\mathbf{T} \vdash \forall x > \overline{n+1} \quad \neg \mathsf{Prov}(f(x)). \tag{۳.۳}$$

---

[۱] در این‌جا توجه می‌کنیم که برخلاف پارادکس‌های دروغگومانندِ معمولی که بر کاربرد صریح خودارجاعی مستقیم یا غیرمستقیم مبتنی هستند، پارادکس یابلو به نظر می‌رسد که شامل هیچ دور یا خودارجاعی نیست. این سوال که این پارادکس آیا واقعاً بدون خودارجاعی است مورد بحث مقالات زیادی اخیراً قرار گرفته است مانند [۲، ۱۹، ۱۷، ۲۲].

و این یک نمونه خاص از معادله (۲.۳) را ثابت می‌کند:

$$\mathbf{T} \vdash \neg \mathsf{Prov}(f(\overline{n+1})). \tag{۴.۳}$$

ولی از طرفی رابطه (۳.۳) دقیقاً اثبات‌پذیری فرمولی با عدد گودلی $f(n+1)$ را نشان می‌دهد. همچنین، برای هر قضیه از نظریه $\mathbf{T}$، با فرض این که نظریه $\mathbf{T}$ به اندازه کافی قوی است، نظریه $\mathbf{T}$ اثبات‌پذیری آن را نیز ثابت می‌کند (به حقیقت (۵.۴.۳) رجوع کنید). بنابراین، از معادلات (۳.۳) و (۱.۳) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}(f(\overline{n+1})).$$

بهر حال، این رابطه به همراه رابطه (۴.۳) نشان می‌دهد که نظریه $\mathbf{T}$ ناسازگار است. بنابراین، اگر نظریه $\mathbf{T}$ ناسازگار باشد، معادله (۲.۳) نادرست است و نظریه $\mathbf{T}$ فرمول با عدد گودلی $f(n)$ را ثابت نمی‌کند.

حال قصد داریم ببینیم که اگر نظریه $\mathbf{T}$ نقیض فرمول با عدد گودل $f(n)$ را ثابت کند آنگاه چه اتفاقی رخ می‌دهد. فرض کنید

$$\mathbf{T} \vdash \neg \forall x > \overline{n} \quad \neg \mathsf{Prov}(f(\overline{n+1})). \tag{۵.۳}$$

بنابراین

$$\mathbf{T} \vdash \exists x > \overline{n} \quad \mathsf{Prov}(f(\overline{n+1})). \tag{۶.۳}$$

لذا mای وجود دارد که[۱]:

$$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}(f(\overline{m})). \qquad (۷.۳)$$

حال چون نظریه $\mathbf{T}$، اثبات‌پذیری فرمول $f(m)$ را ثابت می‌کند پس خود فرمول $f(m)$ را نیز ثابت خواهد کرد، یعنی $\mathbf{T} \vdash f(m)$. (به قضیه (۱۱.۴.۳) رجوع کنید). بنابراین

$$\mathbf{T} \vdash \forall x > \overline{m} \quad \neg\mathsf{Prov}(f(x)). \qquad (۸.۳)$$

حال اگر همان استدلالی را که در معادله (۲.۳) استفاده کردیم برای معادله (۸.۳) به کار ببریم، دو باره به تناقض می‌رسیم. لذا هر دو معادله‌های (۲.۳ و ۵.۳) نادرست هستند. و نظریه $\mathbf{T}$، فرمول با عدد گودلی $f(n)$ را تصمیم‌گیری نمی‌کند. (بطور خلاصه، اگر فرمول با عدد گودل $f(n)$ را Y بنامیم آنگاه $\mathbf{T} \nvdash Y$ و $\mathbf{T} \nvdash \neg Y$).

استدلال فوق بسیار جالب بود ولی رضایت‌بخش نیست. در حقیقت ما قصد داریم که از اضافه نمودن نماد تابعی جدید به زبان استاندارد حساب پرهیز (اجتناب) نماییم و هدف‌مان این است که فرمول‌بندی و استدلال‌مان را در زبان استاندارد حساب انجام دهیم. به منظور دقیق‌تر شدن در استدلال‌ها، مقدمات و فرضیاتی از منطق که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت را به صورت مختصر و بدون اثبات ارایه می‌دهیم.

۴.۳ برخی نتایج اساسی مورد نیاز

ما فرض می‌کنیم که خواننده با مفاهیم کلی اثبات‌های گودلی آشنایی دارد. در این قسمت به منظور در دسترس بودن مطالبی که در ادامه به آنها نیاز خواهیم داشت، سعی می‌کنیم پیشنیازها، تعاریف و

[۱] برهان دقیق جامع و مانع این گام بر پایه خواص ویژه فرمول "Prov" می‌گردد (قضیه (۳.۴.۳) و قضیه (۱۳.۴.۳) را ببینید). این در حالت کلی درست نیست که اگر $\mathbf{T} \vdash \exists x\varphi(x)$، آنگاه وجود داشته باشد عددی مانند m به طوری‌که $\mathbf{T} \vdash \varphi(m)$.

قضایای اساسی در اثبات‌های گودل را ارایه نماییم. اکثر این قضایا را بدون اثبات ارایه داده و برای دیدن جزییات بیشتر، خواننده را به [۲۰] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۳. نظریه حسابی $\mathbf{T}$ را به صورت بازگشتی ابتدایی اصل‌پذیر[۲] می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(i) عدد گودل هر $\mathbf{T}$ـ فرمول و هر $\mathbf{T}$ـ جمله، بازگشتی مقدماتی باشد.

(ii) عدد گودل هر اصل در $\mathbf{T}$، بازگشتی مقدماتی باشد.

(iii) عدد گودل هر اثبات در $\mathbf{T}$، بازگشتی مقدماتی باشد.

نظریه حسابی $\mathbf{T}$ را خوب[۳] می‌نامیم اگر و تنها اگر سازگار، به صورت بازگشتی اصل‌پذیر بوده و همچنین توسیعی از حساب رابینسون Q باشد. در این قسمت تمرکز ما بر روی یک نظریه حسابی دلخواه $\mathbf{T}$ (در زبان حساب پئانو) می‌باشد که فرض می‌کنیم یک نظریه خوب است. ⊛

قضیه ۲.۴.۳. *یک نظریه خوب* $\mathbf{T}$، *همه* Δ_0ـ *جملات را تصمیم‌گیری می‌کند (یعنی یا خود آنها یا نقیض‌شان را ثابت می‌کند).*

برهان. مرجع [۲۰] را ببینید. ⊠

توجه داشته باشید که زبان نظریه $\mathbf{T}$ می‌تواند «اثبات» در نظریه را بیان نماید. به عبارت دیگر، Δ_0ـ فرمول $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(x,y)$ موجود است به طوری که نشان‌دهنده $\mathbf{T}$ـ اثبات‌پذیری در Q و در نتیجه در $\mathbf{T}$ می‌باشد. $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(m,n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گودل یک دنباله از فرمول‌هایی باشد که یک اثبات برای فرمول با عدد گودل m است.

قضیه ۳.۴.۳. *برای هر* m *و* n،

(1) *اگر* $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(m,n)$، *آنگاه* $Q \vdash \mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{m},\overline{n})$.

(2) *اگر* $\neg\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(m,n)$، *آنگاه* $Q \vdash \neg\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{m},\overline{n})$.

[۲] Primitive Recursive Axiomatized

[۳] Nice

برهان. از Δ_0 بودن $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}$ نتیجه می‌شود. $\boxtimes$

از این به بعد، خاصیت اثبات‌پذیری در نظریه $\mathbf{T}$ را با خاصیت $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(x) =_{def} \ \exists y \ \ \mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(y, x)$$

بنابراین، $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ ویژگی (خاصیتی) از $\mathbf{T}$ـ اثبات‌پذیری را بیان می‌کند. واضح است، $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(x)$ یک Σ_1ـ فرمول است. (از این پس، ما از $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ گاهی اوقات در درون زبان نظریه $\mathbf{T}$ و بعضی وقت‌ها در بیرون از آن استفاده خواهیم کرد. بعضی وقت‌ها نیز گزاره (محمول) اثبات‌پذیری را در یک نظریه معین به صورت نسبی خواهیم آورد. اما ما اطمینان داریم که از محتوای متن منظورمان مشخص خواهد شد.) شرح زیر را ملاحظه کنید:

حقیقت ۳.۴.۴. محمول $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ اثبات‌پذیری را بیان می‌کند: m عدد گودل یک قضیه از نظریه $\mathbf{T}$ است درست وقتی که $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(m)$ درست است. با این حال، این محمول اثبات‌پذیری در $\mathbf{T}$ را نمی‌تواند (به طور کامل) نمایش دهد: این گونه نیست که برای هر m اگر $\neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(m)$، درست باشد آنگاه $\mathbf{T} \vdash \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(m)$. $\ominus$

شکل استاندارد شده $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$، خواص ویژه‌ای دارد که در قسمت بعدی می‌آوریم:

حقیقت ۳.۴.۵. (شرایط اثبات‌پذیری): برای هر $\mathtt{PA} \subseteq \mathbf{T}$ داریم:

$(D1)$ اگر $\mathbf{T} \vdash \phi$ آنگاه $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$.

$(D2)$ $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi \to \psi\urcorner) \longrightarrow \big(\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner) \to \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)\big)$.

$(D3)$ $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner) \longrightarrow \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner\big)$. $\ominus$

ما از نماد نقطه‌ای ففرمن[۴] استفاده می‌کنیم. ترم $\dot{z}$، ترمی است که عددی (شماره‌ای) را برای z نشان می‌دهد. و به انتخاب ویژه‌ی (منحصر بفرد) z بستگی دارد. همچنین، برای هر ϕ، منظور از $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\phi(\dot{z}))$ یا $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\phi(z))$ همان $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(sub(\ulcorner\phi(x)\urcorner, \dot{z})\big)$ می‌باشد و زمانی از

[۴] S. Feferman

$\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(sub(\ulcorner\phi(x)\urcorner, \dot{z})\big)$ استفاده می‌کنیم که بر آزاد بودن متغیر z تاکید داشته باشیم. در حقیقت، برای محمول اثبات‌پذیری استاندارد، شرایط اثبات‌پذیری می‌توانند تعمیم داده شوند.

حقیقت ۶.۴.۳. فرض کنید که $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب و توسیعی از PA باشد. اگر $\mathbf{T} \vdash \phi(x)$، آنگاه $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi(\dot{x})\urcorner)$. همچنین، $(D2)$ به فرمول‌های با متغیر آزاد گسترش یافته، و شرط سوم اثبات‌پذیری به $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi(\dot{x})\urcorner) \longrightarrow \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi(\dot{x})\urcorner)\urcorner\big)$ تعمیم می‌یابد. ⊝

در مواردی که حقیقت (۵.۴.۳) اعمال می‌شود، این به منزله‌ی تایید انتقال (درون یک نظریه) از $\psi \longrightarrow \phi$ به $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\psi\urcorner) \longrightarrow \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$ و به $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner) \longrightarrow \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$ است (البته، باید کمی به متغیرهای آزاد پرداخته شود). ما این انتقال را به ترتیب **K۱** و **K۲** می‌گوییم، و آنها را در برهان‌مان در قضیه (۳.۲.۴) به کار می‌بریم.

سازگاری نظریه $\mathbf{T}$ را با $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ نمایش داده، و با $\neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner)$ تعریف می‌کنیم، جایی که $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ یک محمول $\mathbf{T}$ـ اثبات‌پذیری مناسب می‌باشد. در ادامه وقتی از Con استفاده خواهیم کرد که اطلاعات نظریه مشخص شده‌ی نظریه $\mathbf{T}$ از متن روشن شود. قضیه بعدی کم و بیش نشان می‌دهد که هنگام مشاهده سازگاری، هیچ فرقی نمی کند که از چه تناقضی استفاده کنیم.

قضیه ۷.۴.۳. *هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب و توسیعی از PA باشد. آنگاه برای هر فرمول ϕ،*

$$\mathbf{T} \vdash [\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\phi) \wedge \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\neg\phi)] \equiv \neg\mathsf{Con}(\mathbf{T}).$$

برهان. طبق تعریف $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ داریم $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \equiv \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\bot)$. حال با عکس نقیض کردن فرمول فوق داریم $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\bot) \equiv \neg\mathsf{Con}(\mathbf{T})$. با توجه به این‌که $(\bot) \equiv \big((\phi) \wedge (\neg\phi)\big)$ می‌باشد، پس داریم $\mathbf{T} \vdash \big[\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big((\phi) \wedge (\neg\phi)\big)\big] \equiv \neg\mathsf{Con}(\mathbf{T})$. و این طبق شرایط اثبات‌پذیری معادل $\mathbf{T} \vdash [\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\phi) \wedge \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\neg\phi)] \equiv \neg\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ است. ⊠

قضیه دیگری که برای 'Con' مفید خواهد بود این است:

قضیه ۸.۴.۳. *هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب بوده و شرایط اثبات‌پذیری برقرار باشند، آنگاه*

(i) $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \equiv \mathbf{G_T}$، *که در آن* $\mathbf{G_T}$ *همان جمله گودلی نظریه* $\mathbf{T}$ *است.*

(ii) *برای هر* ϕ *داریم:* $\mathbf{T} \vdash \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner\phi\urcorner) \longrightarrow \mathsf{Con}(\mathbf{T})$.

برهان. (i) در مورد جمله گودلی دو اصل زیر را همواره داریم فرض کنیم که $\mathbf{G_T}$ نماد جمله گودلی باشد.

$$(G_1) \qquad \mathbf{T} \vdash \mathbf{G_T} \to \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner\mathbf{G_T}\urcorner)$$

$$(G_2) \qquad \mathbf{T} \vdash \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner\mathbf{G_T}\urcorner) \to \mathbf{G_T}$$

حال

$$[\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \equiv \mathbf{G_T}] \equiv \big[\big(\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to \mathbf{G_T}\big) \wedge \big(\mathbf{T} \vdash \mathbf{G_T} \to \mathsf{Con}(\mathbf{T})\big)\big]$$

(1) $\mathbf{T} \vdash \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner\mathbf{G_T}\urcorner) \longrightarrow \mathsf{Con}(\mathbf{T})$ *از قسمت دوم همین قضیه*

(2) $\mathbf{T} \vdash \mathbf{G_T} \to \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner\mathbf{G_T}\urcorner)$ *از* (G_1)

(3) $\mathbf{T} \vdash \mathbf{G_T} \to \mathsf{Con}(\mathbf{T})$ *از* (1) *و* (2)

برای اثبات قسمت دوم فرض می‌کنیم که $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب بوده شرایط اثبات‌پذیری ارضا شوند. همچنین از نکته زیر استفاده می‌کنیم.

نکته ۹.۴.۳. با توجه به این‌که $\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \equiv \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner)$ است، و چون $\mathbf{G_T}$ یک جمله گودلی است. از آن‌جایی که جمله گودلی نمی‌تواند در سیستم داده شده اثبات شود، لذا داریم:
$\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \equiv \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\mathbf{G_T}).$ $\triangle$

(4) $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \longrightarrow \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner\mathbf{G_T}\urcorner)$ *طبق نکته فوق*

(5) $\mathbf{T} \vdash \neg\mathsf{Prov}_\mathbf{T}(\ulcorner\mathbf{G_T}\urcorner) \to \mathbf{G_T}$ *از* (G_2)

(6) $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to \mathbf{G_T}$ *از* (4) *و* (5)

لذا از (3) و (6) نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \leftrightarrow \mathbf{G_T}.$$

(ii) نماد "$\perp$" به عنوان نماد تناقض یعنی "$(1=0)$" به کار می‌بریم، داریم:

	برای هر ϕ	
(۱)	$\mathbf{T}\vdash\perp\to\phi$	*تعریف تناقض*
(۲)	$\mathbf{T}\vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\perp\to\phi\urcorner)$	*از* (۱) *با* $(D1)$
(۳)	$\mathbf{T}\vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\perp\urcorner)\to \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$	*از* (۲) *با* $(D2)$
(۴)	$\mathbf{T}\vdash \neg\mathsf{Prov}(\ulcorner\phi\urcorner)\to \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\perp\urcorner)$	*با عکس نقیض کردن* (۳)
(۵)	$\mathbf{T}\vdash \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)\to \mathsf{Con}(\mathbf{T})$	*از تعریف سازگاری*

مرحله (۴) از این جهت برقرار است که طبق تعریف $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ داریم:

$\mathsf{Con}(\mathbf{T})\equiv\neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\perp\urcorner)$. ⊠

تعریف ۱۰.۴.۳. نظریه حسابی $\mathbf{T}$ را Σ_1ـ درست می‌نامیم هرگاه برای هر Σ_1ـ جمله مانند ϕ، اگر $\mathbf{T}\vdash\phi$ آنگاه ϕ یک جمله درست در مدل استاندارد حساب باشد (یعنی $\mathbb{N}\vDash\phi$). ⊛

قضیه ۱۱.۴.۳. *هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه ωـ سازگار باشد، در این صورت اگر $\mathbf{T}\vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$ آنگاه $\mathbf{T}\vdash\phi$.*[۱]

برهان. فرض کنید که نظریه $\mathbf{T}$، ωـ سازگار بوده، و همچنین $\mathbf{T}\vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$. این یعنی داریم $\mathbf{T}\vdash\exists y\ \mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(y,\ulcorner\phi\urcorner)$. حال با (برهان) خلف فرض کنید که $\mathbf{T}\nvdash\phi$. آنگاه برای هر m، چنین نیست که داشته باشیم $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(m,\ulcorner\phi\urcorner)$. از آنجایی که $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب بوده و $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}$ فرمولی Δ_0 می‌باشد، برای هر m داریم، $\mathbf{T}\vdash\neg\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{m},\ulcorner\phi\urcorner)$. و این به معنی ωـ ناسازگار بودن نظریه $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}$ است، و این خلاف فرض است. ⊠

قضیه ۱۲.۴.۳. *هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه حسابی خوب باشد، آنگاه $\mathbf{T}$، 1ـ سازگار است اگر وتنها اگر Σ_1ـ درست باشد.*

[۱] باید بین این مطلب و اثبات نمونه‌های اصل‌بازتابی $\phi\longrightarrow\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$ تمایز قایل شویم. هیچ نظریه خوبی نمی‌تواند تمامی نمونه‌های اصل بازتابی را ثابت کند.

برهان. فرض کنید $\mathbf{T}$ یک نظریه Σ_1ـ درست باشد، با این حال فرض کنید که $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ـ ناسازگار باشد. 1ـ ناسازگار یعنی Δ_0ـ فرمولی مانند $\phi(x)$ موجود است که $\mathbf{T} \vdash \exists x\phi(x)$، اما برای عددی مانند m داریم $\mathbf{T} \vdash \neg\phi(\overline{m})$. از آنجایی که نظریه‌های خوب هر Δ_0ـ فرمولی را به طور صحیح تصمیم‌گیری می‌کنند (طبق قضیه ۲.۴.۳). داریم $\mathbf{T} \vdash \phi(\overline{m})$، که باعث ناسازگاری نظریه $\mathbf{T}$ می‌شود، از این‌رو هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب (لذا سازگار) بوده و Σ_1ـ درست باشد، آنگاه باید 1ـ سازگار نیز باشد. برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید که $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ـ سازگار خوب بوده و $\mathbf{T} \vdash \exists x\phi(x)$، که در آن ϕ یک Δ_0ـ فرمول می‌باشد. توسط 1ـ سازگاری، نظریه $\mathbf{T}$ باید برخی از فرمول‌های خوش ساخت از نوع $\neg\phi(\overline{m})$ را ثابت کند، لذا $\neg\phi(\overline{m})$ باید درست باشد (در غیر این صورت نظریه $\mathbf{T}$ باید $\phi(\overline{m})$ را اثبات می‌کرد (طبق قضیه ۲.۴.۳)). بنابراین $\phi(\overline{m})$ باید درست باشد و در نتیجه $\exists x\phi(x)$ درست است. پس نظریه $\mathbf{T}$، Σ_1ـ درست است. ☒

قضیه ۱۳.۴.۳. *هرگاه $\phi(x)$ یک Σ_1ـ فرمول و $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ـ سازگار خوب باشد، در این صورت اگر $\mathbf{T} \vdash \exists x\ \phi(x)$ آنگاه mای وجود دارد که $\mathbf{T} \vdash \phi(\overline{m})$. (این نتیجه می‌تواند برای فرمول‌های با تعداد متغیرهای آزاد بیشتر نیز تعمیم یابد).*

از آنجایی‌که این قضیه واضح نبوده و در بیشتر برهان‌ها مهم است در اینجا ثابت می‌کنیم.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ـ سازگار خوب باشد، قضیه (۱۲.۴.۳) نشان می‌دهد که $\mathbf{T}$ یک نظریه Σ_1ـ درست می‌باشد. حال فرض کنیم $\mathbf{T} \vdash \exists x\ \phi(x)$. هر گاه $\phi(x)$ یک Σ_1ـ فرمول باشد آنگاه $\exists x\ \phi(x)$ نیز چنین است. بنابراین Σ_1ـ درستی نتیجه می‌دهد که $\exists x\ \phi(x)$ در مدل استاندارد درست است. درنتیجه، یک عدد (استاندارد) مانند m موجود است به طوری که داریم $\phi(m)$. می‌توانیم $\phi(m)$ را به صورت زیر فرض کنیم:

$$\exists x_1, x_2, \ldots, x_k\ \phi'(m, x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

که در آن ϕ' یک Δ_0ـ فرمول است. از آنجایی‌که در مدل استاندارد درست است، لذا اعداد استاندارد $n_1, n_2, \ldots, n_k$ برای سورهای وجودی موجودند به طوری که $\phi'(m, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ در مدل

استاندارد برقرار است. در نتیجه، طبق قضیه (۲.۴.۳) داریم:

$$\mathbf{T} \vdash \phi'(\overline{m}, \overline{n_1}, \overline{n_2}, \ldots, \overline{n_k}) \tag{۹.۳}$$

از منطق مرتبه اول به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{T} \vdash \phi(\overline{m}) \tag{۱۰.۳}$$

که برهان تمام می‌شود. $\boxtimes$

با کمک قضیه (۱۳.۴.۳)، قضیه (۱۱.۴.۳) به صورت زیر به تقویت می‌شود:

قضیه ۱۴.۴.۳. *هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ــ سازگار خوب باشد، در این صورت اگر $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$ آنگاه $\mathbf{T} \vdash \phi$.*

برهان. فرض می‌کنیم که $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ــ سازگار و خوب باشد آنگاه فرض می‌کنیم $\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner\phi\urcorner)$، یعنی $\mathbf{T} \vdash \exists v \mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(v, \ulcorner\phi\urcorner)$. فرض (خلف) کنیم که $\mathbf{T} \nvdash \phi$. آنگاه برای هر عددی مانند m داریم $\neg\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(m, \ulcorner\phi\urcorner)$. از آنجایی که $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب است و $\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}$ یک Δ_0ــ فرمول می‌باشد، لذا برای هر عددی مانند m داریم $\mathbf{T} \vdash \neg\mathsf{Prf}_{\mathbf{T}}(\overline{m}, \ulcorner\phi\urcorner)$. اما این با 1ــ سازگار بودن نظریه $\mathbf{T}$ در تناقض است. $\boxtimes$

فصل ۴

گودلی‌سازی دنباله یابلو

مقدمه

در این فصل با استفاده از مطالب فصل قبل می‌بینیم که هرگاه محمول اثبات‌پذیری، شرایط اثبات‌پذیری را ارضا کند،هر چنین جمله‌ای به‌طور اثبات‌پذیر با سازگاری و با جمله گودلی معادل خواهد بود. بنابراین هر دو این‌گونه جملات با یکدیگر به‌طور اثبات‌پذیر معادل هستند. همین مطلب برای وجود حسابی‌سازی در پارادکس یابلو برقرار است. و هم ارزی جملات یابلو را بررسی کرده و به علاوه، صوری‌سازی به‌کار رفته در محمول اثبات‌پذیری راسر را نیز بررسی می‌کنیم.

۱.۴ حسابی سازی دنباله یابلو با اثبات‌پذیری

فرمول $\phi(x, y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(x, y) =_{def} \forall z\, [z > x \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(sub(y, \dot{z}))] \qquad (۱.۴)$$

که در آن منظور از sub همان تابع جایگذاری می‌باشد. (یادآور می‌شود که تابع $sub(a, b)$ نشان‌دهنده جایگزینی b در فرمول با عدد گودل a است؛ بدین معنی که اگر a عدد گودل فرمول $A(x)$ با متغیر آزاد x و b یک عدد باشد، آنگاه $sub(a, b)$ عدد گودل عبارت $A(b)$ است.) در حقیقت، $\phi(x, y)$ می‌گوید که برای هر عدد z که بزرگ‌تر از x است، فرمول با عدد گودل y با متغیر $\dot{z}$ قابل اثبات نیست.

حال نظریه خوب $\mathbf{T}$ را در نظر بگیرید. اگر قضیه (۱۳.۴.۳) و قطری‌سازی تعمیم‌یافته را روی فرمول ϕ اعمال نماییم آنگاه فرمول $Y(x)$ (اثبات‌پذیری دنباله یابلو) موجود است به طوری که[1]:

$$\mathbf{T} \vdash Y(x) \equiv \forall z\, \big[z > x \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(sub(\ulcorner Y(x) \urcorner, \dot{z})\big)\big] \qquad (۲.۴)$$

[1] این روش ساخت دنباله یابلو (اما برای فرمول حاوی محمول صدق) توسط پریست [۱۹] و توسط کتلند [۱۵] به کار گرفته شده است. همچنین پریست در پاورقی ۴ از مقاله خود اشاره می‌کند که استفاده از محمول اثبات‌پذیری به اثبات قضیه اول ناتمامیت منجر می‌شود.

قضیه ۱.۱.۴. *اگر $\mathbf{T}$ یک نظریه حسابی خوب باشد، آنگاه برای هر n، $\mathbf{T} \nvdash Y(\overline{n})$. علاوه بر این، اگر $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ـ سازگار باشد آنگاه $\mathbf{T} \nvdash \neg Y(\overline{n})$. ($Y(\overline{n})$ همان فرمول ساخته شده از روابط (۱.۴) و (۲.۴) با استفاده از محمول اثبات‌پذیری نظریه $\mathbf{T}$ می‌باشد).*

برهان. برای اثبات قسمت اول قضیه، با استفاده از برهان خلف فرض کنید nای موجود است که $\mathbf{T} \vdash Y(\overline{n}$. نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض منجر خواهد شد. با استفاده از رابطه (۲.۴) داریم[1]:

$$\mathbf{T} \vdash \forall z \left[z > \overline{n} \rightarrow \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))\right] \qquad (۳.۴)$$

از رابطه (۳.۴) به طور همزمان نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbf{T} \vdash \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(Y(\overline{n+1})\big) \qquad (۴.۴)$$

و

$$\mathbf{T} \vdash \forall z \left[z > \overline{n+1} \rightarrow \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))\right] \qquad (۵.۴)$$

اما رابطه (۵.۴) با توجه به رابطه (۲.۴) ایجاب می‌کند که:

$$\mathbf{T} \vdash Y(\overline{n+1}) \qquad (۶.۴)$$

رابطه (۶.۴) با استفاده از شرط اول اثبات‌پذیری $(D1)$ ایجاب می‌کند:

$$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner Y(\overline{n+1})\urcorner\big) \qquad (۷.۴)$$

[1] از این به بعد، برای سادگی به جای $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(sub(\ulcorner Y(x)\urcorner, \dot{z})\big)$ می‌نویسیم $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))$.

حال مقایسه رابطه (۴.۴) با رابطه (۷.۴) دلیل به ناسازگاری نظریه $\mathbf{T}$ می‌باشد. لذا با توجه به سازگاری نظریه $\mathbf{T}$ (فرض قضیه) به راحتی تناقض نتیجه می‌شود. بنابراین، برای هر n داریم $\mathbf{T} \nvdash Y(\overline{n})$. این قسمت اول اثبات را تمام می‌کند.

برای اثبات قسمت دوم قضیه فرض کنید که $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ــ سازگار باشد و $\mathbf{T} \vdash \neg Y(\overline{n})$. استدلال را به صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$\mathbf{T} \vdash \neg\forall z\,[z > \overline{n} \rightarrow \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]$$

$$\mathbf{T} \vdash \exists z\,[z > \overline{n} \wedge \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))] \tag{۸.۴}$$

از آن‌جایی که فرمول $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ یک Σ_1ــ فرمول و رابطه $>$ (ترتیب) یک Δ_0ــ فرمول است، پس فرمول $\mathbf{T} \vdash \exists z\,[z > \overline{n} \wedge \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]$ یک Σ_1ــ فرمول خواهد بود. لذا، طبق قضیه (۱۳.۴.۳)، عدد k چنان وجود دارد که:

$$\mathbf{T} \vdash \overline{k} > \overline{n} \wedge \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(\overline{k}))$$

$$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(\overline{k})) \tag{۹.۴}$$

بنابراین، 1ــ سازگاری و قضیه (۱۴.۴.۳) نتیجه می‌دهد که:

$$\mathbf{T} \vdash (Y(\overline{k})) \tag{۱۰.۴}$$

حال با به کارگیری روند اثبات قسمت اول قضیه، دوباره می‌توان به تناقض دست یافت. بنابراین برای هر n داریم $\mathbf{T} \nvdash \neg(Y(n))$.

(با کمی دقت در می‌یابیم که شرایط $(D2)$ و $(D3)$ اثبات‌پذیری اصلاً در این اثبات استفاده نشده‌اند، لذا این نتیجه حتی برای برخی از نظریه‌های بدون استقرا نیز برقرار می‌باشد). $\boxtimes$

بنابراین، با حسابی‌سازی جملات یابلو و استفاده از «اثبات‌پذیری» به جای «صدق» می‌توان به

یک اثبات دیگر برای قضیه ناتمامیت گودل دست یافت، که در آن جمله ارایه شده براساس صورتبندی پارادکس یابلو بوده و در مورد اثبات‌پذیری خودش هیچ حرفی نمی‌زند. (با این حال، اگر شرایط اثبات‌پذیری $(D1-D3)$ برقرار باشند، همه‌ی آنها به طور اثبات‌پذیری در هر جمله‌ای معادل‌اند).

۲.۴ هم‌ارزی جملات یابلو

ابتدا، معتبر بودن Y در $\mathbf{T}$ـ اثبات‌پذیری را با رابطه (۲.۴) تعریف کرده[۱] و لم زیر را داریم:

لم ۱.۲.۴. *هرگاه* $\mathbf{T}$ *یک نظریه خوب باشد، برای هر عددی مانند* m *و* n*، اگر* $n > m$ *باشد، آنگاه* $\mathbf{T} + Y_{\mathbf{T}}(\overline{n}) \vdash Y_{\mathbf{T}}(\overline{m})$.

برهان. این لم به آسانی از ساختار $Y_{\mathbf{T}}(x)$ قابل اثبات است. با توجه به رابطه (۲.۴) داریم:

$$\mathbf{T} \vdash Y_{\mathbf{T}}(\overline{n}) \equiv \forall z \left[z > \overline{n} \rightarrow \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(Y_{\mathbf{T}}(z)\big)\right]$$

از فرض $n > m$ شرط $\forall z \left[z > \overline{n} \rightarrow \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(Y_{\mathbf{T}}(z)\big)\right]$ نتیجه می‌دهد $\forall z \left[z > \overline{m} \rightarrow \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(Y_{\mathbf{T}}(z)\big)\right]$. پس $\mathbf{T} \vdash Y_{\mathbf{T}}(\overline{n}) \longrightarrow Y_{\mathbf{T}}(\overline{m})$. ⊠

بهر حال، با توجه به این‌که در پارادکس اصلی، در نظر اول به نظر نمی‌رسد که هیچ جمله‌ی دنباله یابلو، جمله‌ی قبلی‌اش را در لیست دربر داشته باشد، از این مطلب سوال واضح زیر به ذهن می‌رسد:

هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه 1ـ سازگار خوب باشد، برای هر m و n. اگر $n > m$ باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{T} + Y_{\mathbf{T}}(\overline{m}) \nvdash Y_{\mathbf{T}}(\overline{n})$؟

این بدین معنی است که هرگاه نظریه $\mathbf{T}$، 1ـ سازگار و خوب باشد، یک دنباله نامتناهی از پسوندها را دارد: $\mathbf{T}+Y_{\mathbf{T}}(0), \mathbf{T}+Y_{\mathbf{T}}(1), \mathbf{T}+Y_{\mathbf{T}}(2)$، که هر کدام از ماقبلی‌اش ضعیف‌تر است. همان‌طور که خواهیم دید، پاسخ به این سوال منفی است.

[۱] فقط در متن‌هایی که امکان ابهام وجود دارد از '$\mathbf{T}$' در اندیس استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۴. *هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب باشد و شرایط اثبات‌پذیری $(D1)$ و $(D2)$ را داشته باشد، آنگاه*

$$.\mathbf{T} \vdash \forall x \;\; [Y(x) \to \mathsf{Con}(\mathbf{T})]$$

برهان. نماد '$\bot$' را به عنوان نماد تناقض یعنی $(0 = 1)$ در نظر می‌گیریم:

	برای x دلخواه $\quad \mathbf{T} \vdash Y(x) \to \mathsf{Con}(\mathbf{T})$
گام ۱	*(با منطق کلاسیک)*
	$\mathbf{T} \vdash \bot \to Y(x+1)$
گام ۲	*(از گام ۱ با $(D1)$)*
	$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \bot \to Y(x+1) \urcorner)$
گام ۳	*(مستقیماً از $(D2)$)*
	$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \bot \to Y(x+1) \urcorner) \longrightarrow [\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner Y(x+1) \urcorner)]$
گام ۴	*(از گام‌های ۲ و ۳ با استفاده از قاعده MP)*
	$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner Y(x+1) \urcorner)$
گام ۵	*(از گام ۴ با عکس نقیض کردن)*
	$\mathbf{T} \vdash \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner Y(x+1) \urcorner) \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \bot \urcorner)$
گام ۶	*(از گام ۵ با تعریف $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$)*
	$\mathbf{T} \vdash \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner Y(x+1) \urcorner) \to \mathsf{Con}(\mathbf{T})$
گام ۷	(با استفاده از رابطه (۲.۴))
	$\mathbf{T} \vdash Y(x) \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner Y(x+1) \urcorner)$
گام ۸	*(از گام‌های ۶ و ۷)*
	$\mathbf{T} \vdash Y(x) \to \mathsf{Con}(\mathbf{T})$

⊠

قضیه ۳.۲.۴. *هرگاه نظریه $\mathbf{T}$ خوب باشد و محمول $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ در مشخصه دنباله یابلو طوری استفاده*

شود که شرایط اثبات‌پذیری $(D1-D3)$ را ارضا کند، آنگاه

$$.\mathbf{T} \vdash \forall x\, [\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to Y(x)]$$

برهان. (اثبات کوتاه): با فرض برقراری $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ در نظریه $\mathbf{T}$ کار می‌کنیم. برای یک برهان غیرمستقیم، همچنین $\neg Y(x)$ را فرض کنیم، که $\exists u > x\ \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(x))$ را نتیجه می‌دهد. حال u را یک ثابت قرار می‌دهیم. با $(D2)$ داریم، $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\,[\ulcorner \forall y > u\ \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(y))\urcorner]$. بنابراین (با استفاده دوباره از $(D2)$) نظریه را ثابت می‌کند که این اثباتِ چیزی نیست. با قضیه (۸.۴.۳) داریم $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\mathsf{Con}(\mathbf{T}))$. در حقیقت، با صوری شده قضیه دوم ناتمامیت گودل در نظریه $\mathbf{T}$ داریم $\neg\mathsf{Con}(\mathbf{T})$. (در قسمت بعدی تمام هر سه شرایط اثبات‌پذیری را نیاز داریم).

(اثبات طولانی): قبل از ارایه نسخه طولانی‌تری، باید حقیقت (۵.۴.۳) را بررسی نموده و تعابیر مربوط به کوتاه نوشت‌ها را قبل از این که این حقیقت را در زیر شرح دهیم مستقیماً استنباط نمود. همچنین یادآوری می‌کنیم که **K۱** به شروط اول و دوم اثبات‌پذیری بستگی دارد در حالی که **K۲** به هر سه آنها یعنی $(D1-D3)$ بستگی دارد.

	$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to Y(x)$ برای x دلخواه
گام ۱	(با رابطه (۲.۴))
	$\mathbf{T} \vdash Y(x) \to \forall z\, [z > x \to \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]$
گام ۲	(*از گام ۱ با* **K۲**)
	$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner Y(\dot{x})\urcorner\big) \to \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner \forall z\, [z > \dot{x} \to \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]\urcorner\big)$
گام ۳	(*حساب*)
	$\mathbf{T} \vdash \forall z\, [z > x \to \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))] \to \forall z\, [z > x+1 \to \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]$
گام ۴	(از گام ۳ با رابطه (۲.۴))
	$\mathbf{T} \vdash \forall z\, [z > x \to \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))] \to Y(x+1)$

گام ۵ (از گام ۴ با **K۲**)

$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner \forall z\,[z > \dot{x} \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]\urcorner) \to \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\,[\ulcorner Y(\dot{x}+1))\urcorner]$

گام ۶ (حساب)

$\mathbf{T} \vdash \forall z\,[z > x \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))] \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(\dot{x}+1))$

گام ۷ (از گام ۶ با **K۱**)

$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\{\ulcorner \forall z\,[z > \dot{x} \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]\urcorner\} \to$

$\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\,[\ulcorner \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(\dot{x}+1))\urcorner]$

گام ۸ (منطق، گام‌های ۵ و ۷)

$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\{\ulcorner \forall z\,[z > \dot{x} \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]\urcorner\} \to$

$\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\,[\ulcorner \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(\dot{x}+1))\urcorner] \wedge \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\,[\ulcorner \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(\dot{x}+1))\urcorner]$

گام ۹ (از گام ۸ با قضیه (۷.۴.۳))

$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\{\ulcorner \forall z\,[z > \dot{x} \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(Y(z))]\urcorner\} \to \neg \mathsf{Con}(\mathbf{T})$

گام ۱۰ (منطق، گام‌های ۲ و ۹)

$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner Y(\dot{x})\urcorner)$

گام ۱۱ (منطق، گام ۱۰)

$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to (\forall z)\neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner Y(z)\urcorner)$

گام ۱۲ (منطق، گام ۱۱ و با رابطه (۲.۴))

$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to Y(x)$

⊠

از قضایای (۲.۲.۴) و (۳.۲.۴) نتایج زیر استنباط می‌شود:

نتیجه ۴.۲.۴. *اگر $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب باشد و در شرایط اثبات‌پذیری صدق کند، آنگاه* $\mathbf{T} \vdash \forall x, y\,[Y(x) \equiv Y(y)]$.

برهان. از قضایای (۲.۲.۴) و (۳.۲.۴) داریم:

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\,[Y_{\mathbf{T}}(x) \equiv \mathsf{Con}(\mathbf{T})] \qquad (*)$$

و اگر از متغیر 'y' استفاده کنیم؛

$$\mathbf{T} \vdash \forall y\,[Y_{\mathbf{T}}(y) \equiv \mathsf{Con}(\mathbf{T})] \qquad (\star)$$

از $(*)$ و $(\star)$ داریم:

$$\mathbf{T} \vdash \forall x, y\,[Y(x) \equiv Y(y)].$$

$\boxtimes$

نکته ۵.۲.۴. جواب سوال ما تا حدودی منفی است. تا زمانی که $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب بوده و شرایط اثبات‌پذیری ارضا شوند، آنگاه $\mathbf{T} + Y_{\mathbf{T}}(\overline{m}) \vdash Y_{\mathbf{T}}(\overline{n})$، و این که $n < m$ باشد مهم نیست. $\triangle$

همچنین، یادآوری می‌کنیم که با توجه به قضیه (۸.۴.۳)، جمله گودل با جمله سازگاری به طور اثبات‌پذیر هم‌ارز است. بنابراین:

نتیجه ۶.۲.۴. *اگر $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب باشد و شرایط اثبات‌پذیری برقرار باشند، آنگاه برای هر عددی مانند n داریم* $\mathbf{T} \vdash G_{\mathbf{T}} \equiv Y_{\mathbf{T}}(\overline{n})$.

برهان. طبق قضایای (۲.۲.۴) و (۳.۲.۴) داریم:

$$\mathbf{T} \vdash \forall x\,[Y_{\mathbf{T}}(x) \equiv \mathsf{Con}(\mathbf{T})]$$

در نتیجه داریم:

$$\mathbf{T} \vdash [Y_{\mathbf{T}}(\overline{n}) \equiv \mathsf{Con}(\mathbf{T})]$$

از قسمت دوم قضیه (۸.۴.۳) داریم:

$$\mathbf{T} \vdash [G_{\mathbf{T}} \equiv \mathsf{Con}(\mathbf{T})]$$

در نتیجه داریم:

$$.\mathbf{T} \vdash [G_{\mathbf{T}} \equiv Y_{\mathbf{T}}(\overline{n})]$$

$\boxtimes$

۳.۴ پارادکس وجودی یابلو

به نظر می‌رسد که می‌توانیم یک پارادکس مشابه، اما با سور وجودی تعریف (بیان) نماییم (مراجعه کنید به [۲۱]). دنباله نامتناهی زیر را در نظر بگیرید:

$$S_0 = `\exists x\big(P_1(x) \wedge \neg \mathsf{Tr}(x)\big)',$$

$$S_1 = `\exists x\big(P_2(x) \wedge \neg \mathsf{Tr}(x)\big)',$$

$$S_2 = `\exists x\big(P_3(x) \wedge \neg \mathsf{Tr}(x)\big)',$$

$$\vdots$$

(جایی که P_iها همانند فرمول‌بندی اصلی (واقع در صفحه ۴۵) تعبیر می‌شوند). فرض کنید S_0 درست باشد. آنگاه، جمله بعدی را در این لیست S_k می‌گوییم، که نادرست (غلط) می‌باشد. اما، چنین نیست که $\exists > k\ \neg\mathsf{Tr}(S_k)$ را داشته باشیم. یعنی داریم $\forall x > k\ \mathsf{Tr}(S_x)$. به خصوص، $\mathsf{Tr}(S_k)$ می‌گوید که یک جمله نادرست (غلط) بعد از S_{k+1} موجود است. اما این S_{k+1} نیز بعد از S_k است، و چون همه‌ی جملات بعد از S_k درست هستند. که یک تناقض است. بنابراین، S_0 نادرست است. حال فرض کنیم S_0 نادرست (غلط) باشد. آنگاه، ما فقط برای S_0 قسمت دوم استدلال فوق را بررسی می‌کنیم.

اکنون بررسی می‌کنیم وقتی در حسابی شده این پارادکس Tr را با $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ جای‌گزین نماییم چه اتفاقی می‌افتد؟

چنین قرار دهید

$$\psi(x,y) =_{def} \ \exists z > x\ \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(sub(y,\dot{z})\big) \tag{۱۱.۴}$$

با قطری‌سازی روی فرمول ψ می‌دانیم که فرمولی مانند $E(x)$ موجود است به طوری که:

$$\mathbf{T} \vdash E(x) \equiv \ \exists z > x\ \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(sub(\ulcorner E(x) \urcorner,\dot{z})\big) \tag{۱۲.۴}$$

قضیه ۱.۳.۴. *اگر* $\mathbf{T}$ *یک نظریه* 1*ـ سازگار خوب باشد، آنگاه برای هر* n *استاندارد داریم،* $\mathbf{T} \nvdash \neg E(\overline{n})$.

برهان. فرض کنید $\mathbf{T} \vdash \neg E(\overline{n})$. آنگاه[۱]:

$$\mathbf{T} \vdash \forall z > \overline{n}\ \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(E(z)) \tag{۱۳.۴}$$

پس

$$\mathbf{T} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner E(\overline{n+1}) \urcorner)$$

توسط قضیه (۱۴.۴.۳) و 1ـ سازگاری نظریه $\mathbf{T}$ داریم:

$$\mathbf{T} \vdash E(\overline{n+1})$$

این بدین معنی است که:

$$\mathbf{T} \vdash \exists z > \overline{n+1}\ \neg \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(E(z))$$

[۱] '$\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(E(z))$' کوتاه نوشت '$\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(sub(\ulcorner E(x) \urcorner,\overline{z}))$' است.

اما رابطه (۱۳.۴) ایجاب می‌کند:

$$\mathbf{T} \vdash \forall z > \overline{n+1}\ \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(E(z))$$

و با سازگاری نظریه $\mathbf{T}$ در تناقض است. $\boxtimes$

به علاوه، طبق فرض (خلف) که فرض کردیم $\mathbf{T} \vdash E(\overline{n})$ بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{T} \vdash \exists z > \overline{n}\ \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner E(z) \urcorner) \tag{۱۴.۴}$$

این اجازه نمی‌دهد که موجود بودن یک گواهی (مدرک) استانداردی را برای اثبات‌پذیر بودن این ادعا استنباط کنیم. می‌توانیم استدلال را درون نظریه $\mathbf{T}$ با یک ثابت دلخواه ادامه دهیم (فقط مطمئن شوید که معنی هیچ اصولی فقط در اعداد استاندارد صدق نمی‌کند):

$$a > \overline{n} \wedge \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner E(a) \urcorner)$$

اما این‌جا بحث (استدلال) متوقف شده است. برخلاف چیزی که در برهان اصلی اتفاق افتاده است، رابطه (۱۴.۴)، $E(a)$ را شامل نمی‌شود. با این حال، برای برقراری این ادعا، جایی برای استدلال ساده‌ی دیگری وجود دارد.

قضیه ۲.۳.۴. *هرگاه* $\mathbf{T}$ *یک نظریه خوب باشد، آنگاه برای هر عددی مانند* n *داریم* $\mathbf{T} \nvdash E(\overline{n})$.

برهان. اگر $\mathbf{T} \vdash E(\overline{n})$، آنگاه نظریه $\mathbf{T}$ ثابت می‌کند که نمی‌تواند یک چیز خاص را ثابت کند پس بنابراین طبق قضیه (۸.۴.۳) سازگاری خودش را ثابت می‌کند. اما از آنجایی که $\mathbf{T}$ نظریه‌ی خوبی است، (طبق قضیه دوم ناتمامیت گودل) نظریه $\mathbf{T}$ نمی‌تواند سازگاری خود را ثابت کند. تناقض. $\boxtimes$

حال می‌توانیم بپرسیم که آیا همه‌ی Eـ جملات با تمام Yـ جملات به‌طور اثبات‌پذیر معادل هستند؟ پاسخ به این سوال مثبت است:

قضیه ۳.۳.۴. *هرگاه $\mathbf{T}$ یک نظریه خوب بوده و شرایط اثبات‌پذیری را ارضا کند، تمامی Eـ جملات در نظریه $\mathbf{T}$ به‌طور اثبات‌پذیر معادل‌اند. یعنی برای هر m,n داریم $\mathbf{T} \vdash E(\overline{n}) \equiv E(\overline{m})$.*

برهان. با به‌طور اثبات‌پذیر معادل بودن هر (چنین) جمله‌ای با $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ ثابت می‌کنیم. از چپ به راست داریم $\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to E(\overline{n})$، این واضح است زیرا $E(\overline{n})$ اثبات‌ناپذیری از یک جمله را بیان می‌کند، و این (جمله) سازگاری را شامل می‌شود (قضیه ۸.۴.۳).

از راست به چپ، درون نظریه $\mathbf{T}$ کار می‌کنیم. فرض کنیم $\mathsf{Con}(\mathbf{T})$ و $\neg E(\overline{n})$. از این بدست می‌آوریم $\forall z > n\ \mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}(\ulcorner E(z)\urcorner)$. در نتیجه $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner E(\overline{n+1})\urcorner\big)$. لذا

$$\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner \mathsf{Con}(\mathbf{T})\urcorner\big) \qquad\qquad (\bigstar)$$

را بدست می‌آوریم، زیرا (در حال حاضر) عددی مانند k موجود نیست که $\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to E(k)$ را درون حوزه‌ای از محمول $\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}$ استدلال کنیم. اما قضیه دوم ناتمامیت گودل (صوری شده) نتیجه می‌دهد که $\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \to \neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner \mathsf{Con}(\mathbf{T})\urcorner\big)$. لذا داریم $\neg\mathsf{Prov}_{\mathbf{T}}\big(\ulcorner \mathsf{Con}(\mathbf{T})\urcorner\big)$، که با توجه به قسمت اول برهان با $(\bigstar)$ یک تناقض می‌دهد و برهان تمام می‌شود. $\boxtimes$

از روش برهان قضیه فوق آشکارا نتیجه زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۴.۳.۴. *تمامی Eـ جملات به‌طور اثبات‌پذیر با جمله‌ی سازگاری و با جمله گودل معادل هستند، هرگاه نظریه پس‌زمینه خوب بوده و شرایط اثبات‌پذیری ارضا شوند.*

برهان. در برهان قضیه (۳.۳.۴) معادل بودن Eـ جملات به‌طور اثبات‌پذیر با جمله سازگاری را ثابت کردیم یعنی داریم $\mathsf{Con}(\mathbf{T}) \equiv E(x)$. از قضیه (۸.۴.۳) نیز معادل بودن جمله سازگاری با جمله گودلی را داریم، یعنی $G_{\mathbf{T}} \equiv \mathsf{Con}(\mathbf{T})$. در نتیجه معادل بودن Eـ جملات به‌طور اثبات‌پذیر با جمله گودلی را از این‌دو بدست می‌آوریم یعنی $G_{\mathbf{T}} \equiv E(x)$. $\boxtimes$

مراجع

[1] J. Barwise. *Handbook of Mathematical Logic,* North Holand, Amsterdam, 1977.

[2] J. C. Beall. *Is Yablo's Paradox Non-circular?,* Analysis, Vol. 61.3 (2001), pp. 176-187.

[3] G. Boolos. *A New Proof the Gödel Incompleteness Theorem,* Notice of the American Mathematical Society, Vol. 36 (1989). pp. 388-390.

[4] G. Boolos. *The Logic of Provability,* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] C. Cieśliński. R. Urbaniak. *Gödelizing the Yablo Sequence,* Journal of Philosophical Logic, Vol. 42 (2013), pp. 679-695.

[6] C. Cieśliński. *Heterologicality and Incompleteness,* Mathematical Logic Quarterly, Vol. 48 (2002), pp. 105-110.

[7] G. J. Chaitin. *Information-Theoretic Limitations of Formal Systems,* Journal of Association for Computing Machinary, Vol. 21 (1974). pp. 403-424.

[8] H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic,* Academic Press, San Diego, 1972; (2nd ed. 2001).

[9] H. B. Enderton. *Computability Theory, An Introduction to Recursion Theory,* Academic Press, 2011.

[10] S. Feferman. *Arithmetization of Metamathematics in a General Setting,* Fundamenta Mathematicae, Vol. 44 (1960), pp. 35-92.

[11] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of First-Order Arithmetic,* Berlin, Second Printing 1998 of the First Edition 1993.

[12] K. Gödel. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I,* In Kurt Gödel, Collected Works, Vol. I: Publications. 1929-1936, (1986), pp. 145-195.

[13] D. Isaacson. *Necessary and Sufficient Conditions for Undecidability of the Gödel Sentence and its Truth,* Logic mathematics, Philsophy, Vintage Enthusiasms. The Westrn Ontrio Seriesin Philsophy of Science, Vol. 75 (2011), pp. 135-152.

[14] R. G. Jeroslow. *Redundancies in the Hilbert-Bernays Derivability Conditions for Gödel's Second Incompleteness Theorem,* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 38 (1973), pp. 359-367.

[15] J. Ketland. *Yablo's Paradox and $\omega-$Inconsistency,* Synthese, Vol. 145 (2005), pp. 295-302.

[16] G. Leach-Krouse. *Yablo's Paradox and Arithmetical Incompleteness,* in arXiv:1110.2056v3 [math.LO] (18 Dec. 2011), pp. 1-3.

[17] H. Leitgeb. *What is a Self-referential Sentence? Critical Remarks on the Alleged (Non-)circularity of Yablo's Paradox,* Logique and Analyse, Vol. 177-178 (2002), pp. 3-14.

[18] E. Mendelson. *Introdduction to Mathematical Logic,* Taylor and Francis Group, Chapman and Hall/CRC, 5th ed, 2010.

[19] G. Priest. *Yablo's Paradox,* Analysis, Vol. 57 (1997), pp. 236-242.

[20] P. Smith. *An Introduction to Gödel's Theorems,* Cambridge University Press, 2007; (2nd ed. 2013).

[21] R. Sorensen. *Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars,* Mind, Vol. 107 (1998), pp. 137-154.

[22] R. Urbaniak. *Leitgeb "About" Yablo,* Logique and Analyse, Vol. 207 (2009), pp. 251-252.

[23] S. Yablo. *Paradox Without Self-Reference,* Analysis, Vol. 53 (1993), pp. 251-252.

[۲۴] پ. سراجی، *مقدمه‌ای بر منطق ریاضی*، انتشارات اقیانوس معرفت، ۱۳۸۹.

[۲۵] م. ص. مصلحیان، *فلسفه ریاضی*، انتشارات واژگان خرد، ۱۳۸۴.

[۲۶] ض. موحد، *از ارسطو تا گودل*، مجموعه مقالات فلسفی_ منطقی، انتشارات هرمس، ۱۳۸۲.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات‌پذیری .... Provability
اثبات‌ناپذیری .... Unprovability
استدلال .... Argument
استقراء .... Induction
استنتاج .... Deduction
اصل .... Principle
اصل‌پذیر .... Axiomatized
اصل موضوع .... Axiom
با رمزنگاری مناسب نحو .... Modulo Syntactic Encoding
بازگشتی .... Recursive
بازگشتی ابتدایی اصل‌پذیر .... Primitive Recursive Axiomatized
برهان .... Proof
به‌طور اثبات‌پذیر معادل .... Provably Equivalent
پارادوکس .... Paradox
پارادوکس بِری .... Berry's paradox
پارادوکس یابلو .... Yablo's paradox
پیچیدگی .... Complexity
تصمیم‌ناپذیری .... Undecidablitity

تعریف‌پذیری	Binumerates
تعمیم‌یافته	Generalized
تفکیک	Unfurling
تمامیت	Completeness
تناقض	Contradiction
ثابت	Constant
جایگزین	Replaced
جایگزینی	Substitution
جمله مستقل	Independent Sentence
حساب	Arithmetic
حساب رابینسون	Robinson Arithmetic
حکم	Statement
حوزه	Scope
خوب	Nice
خودارجاعی	Self-Reference
درست	Sound
در نظر اول	Prima Facie
دنباله نامتناهی	Infinite Sequence
رضایت‌بخش	Satisfactory
زبان	Language
سازگار	Consistent
سور	Quantifier
سور وجودی	Existential Quantification
شرایط	Condition
شرایط اثبات‌پذیری	Derivability Conditions

شمارش‌پذیر	Enumerable
صدق	Truth
صدق‌پذیری	Satisfiable
صوری	Formal
صوری شده	Formalized
عددگودل	Gödel number
عکس نقیض	Contraposition
عملگر	Operator
فرمول	Formula
قابل توصیف	Describable
قضایای ناتمامیت گودل	Gödel's Incompleteness Theorems
قضیه	Theorem
قطری‌سازی	Diagonalization
کدگذاری	Encoding
کوتاه‌نوشت	Abbreviate
متغیر	Variable
متغیر آزاد	Variable Free
متناهی	Finite
محاسبه‌پذیر	Computable
محمول	Predicate
محمول اثبات‌پذیری	Provability Predicate
محمول اثبات‌پذیری راسر	Rosser's Provability Predicate
معادله	Equation
معنایی	Semantic
منجر	Leads

منحصر بفرد .... Particular
منطق کلاسیک .... Classical Logic
ناتمامیت .... Incompleteness
ناخوش‌ساخت .... Non-Well-Founded
ناسازگار .... Inconsistent
نتیجه .... Conclusion
نظریه .... Theory
نظریه خوب .... Nice Theory
نقیض .... Negation
هم‌ارز .... Equivalent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

کوتاه‌نوشت	Abbreviate
استدلال	Argument
حساب	Arithmetic
اصل موضوع	Axiom
اصل‌پذیر	Axiomatized
پارادوکس بِری	Berry's paradox
تعریف‌پذیری	Binumerates
منطق کلاسیک	Classical Logic
تمامیت	Completeness
پیچیدگی	Complexity
محاسبه‌پذیر	Computable
نتیجه	Conclusion
شرایط	Condition
سازگار	Consistent
ثابت	Constant
تناقض	Contradiction
عکس نقیض	Contraposition
استنتاج	Deduction

Derivability Conditions	شرایط اثبات‌پذیری
Describable	قابل توصیف
Diagonalization	قطری‌سازی
Encoding	کدگذاری
Enumerable	شمارش‌پذیر
Equation	معادله
Equivalent	هم‌ارز
Existential Quantification	سور وجودی
Finite	متناهی
Formal	صوری
Formalized	صوری شده
Formula	فرمول
Generalized	تعمیم‌یافته
Gödel number	عدد گودل
Gödel's Incompleteness Theorems	قضایای ناتمامیت گودل
Independent Sentence	جمله مستقل
Induction	استقراء
Incompleteness	ناتمامیت
Inconsistent	ناسازگار
Infinite Sequence	دنباله نامتناهی
Language	زبان
Leads	منجر
Modulo Syntactic Encoding	با رمزنگاری مناسب نحو
Negation	نقیض
Nice	خوب

Nice Theory .... نظریه خوب
Non-Well-Founded .... ناخوش‌ساخت
Operator .... عملگر
Paradox .... پارادوکس
Particular .... منحصر بفرد
Predicate .... محمول
Prima Facie .... در نظر اول
Primitive Recursive Axiomatized .... بازگشتی ابتدایی اصل‌پذیر
Principle .... اصل
Proof .... برهان
Provability .... اثبات‌پذیری
Provability Predicate .... محمول اثبات‌پذیری
Provably Equivalent .... به طور اثبات‌پذیر معادل
Quantifier .... سور
Recursive .... بازگشتی
Replaced .... جایگزین
Robinson Arithmetic .... حساب رابینسون
Rosser's Provability Predicate .... محمول اثبات‌پذیری راسر
Satisfactory .... رضایت‌بخش
Satisfiable .... صدق‌پذیری
Self-Reference .... خودارجاعی
Semantic .... معنایی
Scope .... حوزه
Sound .... درست
Statement .... حکم

جایگزینی .... Substitution
قضیه .... Theorem
نظریه .... Theory
صدق .... Truth
تصمیم‌ناپذیری .... Undecidablitity
تفکیک .... Unfurling
اثبات‌ناپذیری .... Unprovability
متغیر .... Variable
متغیر آزاد .... Variable Free
پارادوکس یابلو .... Yablo's paradox

فهرست الفبایی

Surname: Delara Moghanloo	**Name:** Vali

Title: Yablo's Paradox and Gödel's Incompleteness Theorems

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: Hazhir Homei

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2015 **Number of Pages:** 80

Keywords: Gödel's Incompleteness, Omega-Consistency, Yablo's Paradox, Provability, Arithmetic.

Abstract

Yabloo's paradox is one of the most challenging topics that have recently attracted philosophers, mathematicians and even computer scientists. In this paradox an infinite series of sentences that are not self-contradictory is introduced, in such a way that a contradiction results from its existence; apparently the circularity is avoided.

Kurt Gödel in his original papar, where he proved the incompleteness theorems, pointed out that instead of the Liar paradox, any other paradox can be used. Recently, several different proofs for the first and second incompleteness theorems based on paradoxes such as Berry's paradox and the Surprise Examination paradox have appeared. In this thesis, the relation between Yablo's paradox and Gödel incompleteness theorem is investigated and some proofs are presented for Gödel's incompleteness theorem based on Yablo's paradox.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Yablo's Paradox and Gödel's Incompleteness Theorems

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Hazhir Homei

By

Vali Delara Moghanloo

2015